

Texto Didático de Cálculo 5 (GMA00162)

- Números Complexos e Funções de Uma Variável Complexa
- Séries de Funções Ortogonais
- Aplicações das Séries de Fourier Trigonométricas na Resolução de EDPs
- Método de Frobenius e Funções Especiais
- A Série de Fourier-Bessel e sua Aplicação na Resolução de EDPs
- A Série de Legendre e sua Aplicação na Resolução de EDPs
- Resolução de EDPs em Domínios Infinitos

Roberto Toscano Couto
`rtoscano@id.uff.br`
<https://rtoscanocouto.wixsite.com/aula>
Departamento de Matemática Aplicada (GMA)
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Niterói, RJ

1ª edição: 2025

Esta versão: 13 de fevereiro de 2026

Prefácio

"A Física Matemática é a Matemática praticada por físicos que querem ser rigorosos, ou a Física praticada por matemáticos que querem ser aplicados."

— (folclore acadêmico)

Trata-se de um texto didático para a disciplina "Cálculo 5" (ministrada pelo Departamento de Matemática Aplicada da UFF sob o código GMA00162), cujo objetivo principal é descrever a resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) clássicas da Física – basicamente, as equações do calor, da onda e de Laplace – pelo método de separação de variáveis. Para alcançar essa meta, é necessário munir o aluno de outras teorias que são de importância geral e que, por isso, devem integrar o repertório matemático de todo estudante de Física ou Engenharia, tornando-se metas adicionais tão relevantes quanto a resolução de EDPs que orienta este texto.

Na verdade, tais resoluções são iniciadas em Cálculo 4, sendo restritas, porém, a soluções representadas por séries de senos e cossenos. Em Cálculo 5, a metodologia é aprofundada por meio da Teoria de Sturm-Liouville, da qual emerge uma teoria de representação de funções por séries de autofunções definidas em domínios finitos. Essa abordagem generaliza as séries trigonométricas ao envolver funções de naturezas distintas, conhecidas como funções especiais, tais como os polinômios de Legendre e as funções de Bessel. O estudo dessas funções e de suas propriedades fundamentais é essencial, pois elas surgem de modo recorrente na modelagem de fenômenos físicos.

Consideram-se também problemas de EDPs cuja resolução requer o emprego de autofunções definidas em domínios infinitos, casos em que as soluções são representadas por integrais, em vez de séries. Tais problemas, todavia, restringem-se, neste texto, àqueles que podem ser tratados por meio das integrais ou transformadas de Fourier construídas com autofunções trigonométricas.

A organização dos capítulos e seções segue o princípio de desenvolver a teoria à medida que se faça necessária. Nesse espírito, a Teoria de Sturm-Liouville é introduzida logo no Capítulo 2, ainda que o Capítulo 3 (que facilmente integraria o programa de Cálculo 4) não exija esse aparato mais geral, porque assim, já no Capítulo 3, evidencia-se o arcabouço conceitual que fundamenta todas as representações em séries de funções. O estudo das funções especiais, no Capítulo 4, antecede suas aplicações diretas, desenvolvidas nos Capítulos 5 e 6, e o texto encerra-se, no Capítulo 7, com resolução de problemas que envolvem autofunções definidas em domínios infinitos por meio das integrais e transformadas de Fourier. O Capítulo 1 tem caráter complementar, contribuindo para a formação matemática do físico e do engenheiro, e provendo conceitos matemáticos que são utilizados pontualmente ao longo do texto.

As principais referências bibliográficas são apresentadas abaixo do título de cada capítulo.

Sumário

1	Números Complexos e Funções de Uma Variável Complexa	1
1.1	Números Complexos e as Quatro Operações Elementares	1
1.2	Propriedades da Conjugação	5
1.3	Propriedades do módulo e das partes real e imaginária	6
1.4	Conjunto de pontos do plano complexo	6
1.5	Funções Complexas: Conceitos Preliminares	7
1.6	Limite e Continuidade	8
1.7	Diferenciabilidade e Analiticidade	9
1.8	A Função Potência $w = z^k$ (k inteiro)	11
1.9	A Função Exponencial	12
1.10	A Função Logarítmica	14
1.11	A Função Raiz Enésima $w = \sqrt[n]{z}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)	15
1.12	As Funções Trigonômétricas	18
1.13	As Funções Hiperbólicas	19
1.14	As Inversas das Funções Hiperbólicas e Trigonômétricas	19
1.15	As Funções Potência $w = z^c$ e Exponencial $w = c^z$ Generalizadas	20
1.16	Apêndice: Redução Ao Primeiro Quadrante	20
1.17	Exercícios	22
2	Séries de Funções Ortogonais	31
2.1	Ortogonalidade de Funções e Expansão em Funções Ortogonais	31
2.1.1	Produto Escalar	31
2.1.2	Operadores Lineares	34
2.1.3	Expansão em Funções Ortogonais	34
2.2	Teoria de Sturm-Liouville	35
2.3	Problemas de Sturm-Liouville com a EDO $\psi'' + \lambda\psi(x) = 0$	38
2.4	Problemas de Sturm-Liouville Com Outras EDOs	42
2.5	Série de Fourier Generalizada Dupla e Tripla	42
2.6	Ausência de Autovalores Negativos	44
3	Aplicações das Séries de Fourier Trigonômétricas na Resolução de EDPs	45
3.1	Equações do Calor e da Onda nas Coordenadas Cartesianas em Mais De Uma Dimensão	45
3.2	Peculiaridades das Resoluções dos Problemas de Calor e Onda	48
3.3	Equação de Laplace em Três Coordenadas Cartesianas	50
3.4	O Núcleo de Poisson para a Solução da Equação de Laplace num Disco	52
3.5	Problemas Não Homogêneos de Calor e Onda	53
3.6	Exercícios	54
3.6.1	Enunciados	54
3.6.2	Soluções	55
4	Método de Frobenius e Funções Especiais	59
4.1	Método de Frobenius	59
4.1.1	Parte 1 (Frobenius I)	59
4.1.1.1	Caso de raízes indiciais que não diferem por um inteiro: $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$. .	60
4.1.1.2	Caso de raízes indiciais iguais	62
4.1.1.3	Caso de raízes indiciais que diferem por um inteiro positivo: $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}^*$	62
4.1.2	Parte 2 (Frobenius II)	64
4.1.3	Exercícios Resolvidos	68

4.2	Funções de Legendre	74
4.2.1	Soluções da Equação de Legendre	74
4.2.2	Polinômios de Legendre (As Funções de Legendre de 1ª Espécie)	75
4.2.3	As Funções de Legendre de 2ª Espécie	77
4.3	Funções de Bessel	78
4.3.1	Função Gama	78
4.3.2	Solução Geral da Equação de Bessel	80
4.3.3	Solução Geral da Equação de Bessel Modificada	83
4.3.4	Propriedades das Funções de Bessel	84
4.3.4.1	Gráficos	84
4.3.4.2	Fórmulas de Recorrência	85
5	A Série de Fourier-Bessel e sua Aplicação na Resolução de EDPs	87
5.1	Funções de Bessel como Autofunções	87
5.2	Aplicação da Série de Fourier-Bessel na Resolução de EDPs	92
5.3	Exercícios	101
5.3.1	Enunciados	101
5.3.2	Soluções	102
6	A Série de Legendre e sua Aplicação na Resolução de EDPs	108
6.1	Polinômios de Legendre como Autofunções	108
6.2	Aplicação da Série de Legendre na Resolução da Equação de Laplace	112
6.3	Exercícios	117
6.3.1	Enunciados	117
6.3.2	Soluções	117
7	Resolução de EDPs em Domínios Infinitos	119
7.1	Integrais de Fourier	119
7.1.1	Construção das Integrais de Fourier	119
7.1.2	Condições Suficientes para a Validade das Integrais de Fourier	121
7.1.3	Resolução de EDPs por Integrais de Fourier	121
7.2	Transformadas de Fourier	125
7.2.1	Definição	125
7.2.2	Propriedades	127
7.2.3	Resolução de EDPs por Transformadas de Fourier	129
	Referências Bibliográficas	134

Capítulo 1

Números Complexos e Funções de Uma Variável Complexa

- Ref. [5], cap. 13

1.1 Números Complexos e as Quatro Operações Elementares

Um número complexo z é uma expressão da forma $z = x + iy$, onde x e y são números reais, e i , a denominada unidade imaginária, satisfaz a equação $i^2 = -1$. Há ainda a seguinte nomenclatura:

$$\text{Em } x + iy: \begin{cases} x = \operatorname{Re} z \longrightarrow \text{parte real de } z \\ y = \operatorname{Im} z \longrightarrow \text{parte imaginária de } z \end{cases}$$

Note que $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

Naturalmente, dois números complexos são iguais se e somente se tiverem as mesmas partes real e imaginária. Assim, se $(a + b) + i(a - b) = -4 + 10i$, então $a + b = -4$ e $a - b = 10$, donde $a = 3$ e $b = -7$.

O número complexo $z = x + iy$ é dito

- real se $y = 0$
- imaginário se $y \neq 0$
- imaginário puro se $y \neq 0$ e $x = 0$

Geometricamente, o número complexo $z = x + iy$ pode ser visto como o ponto de coordenadas cartesianas x e y ou coordenadas polares r e θ , assim se identificando o plano xy com o chamado plano complexo. Também podemos visualizar $z = x + iy$ como o vetor desde a origem $(0, 0)$ até o ponto (x, y) desse plano.

A coordenada polar radial r define o módulo $|z|$ de z : $|z| = |x + iy| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A coordenada polar θ , que é indefinida no ponto $z = 0$, define o chamado argumento de z . Num ponto $z \neq 0$, se θ é seu argumento, então qualquer ângulo congruente $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, também é. Denotamos o argumento de z por $\arg z$, que, na verdade, é uma função multivalorada (multivalente, plurívoca), associando cada ponto $z \neq 0$ à infinidade de valores $\theta + 2k\pi$, sendo θ o valor escolhido para a coordenada polar angular desse ponto.

O valor de θ em cada ponto numa circunferência centrada na origem pode ser escolhido no intervalo $[0, 2\pi)$, ou $[-\pi, \pi)$, ou qualquer outro intervalo de largura 2π . O argumento de z em cada ponto do plano complexo (sem a origem) assim escolhido é uma função univalorada (univalente, unívoca), chamada de determinação principal do argumento e denotada por $\operatorname{Arg} z$.

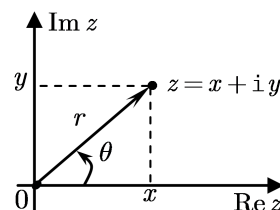
Em resumo,

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1.1)$$

onde $\operatorname{Arg} z = \theta$: o valor escolhido para a coordenada polar angular em cada ponto do plano complexo, exceto na origem.

Uma vez que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, podemos escrever

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$



Nessa equação, temos a representação do número complexo z na forma cartesiana, envolvendo $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, e na forma polar, envolvendo $r = |z|$ e $\theta = \operatorname{Arg} z$. Quando usamos essas representações, devemos ter em mente que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dois números complexos que são iguais representam um mesmo ponto do plano complexo,} \\ \text{tendo, portanto, as mesmas coordenadas cartesianas e as mesmas coordenadas polares, i.e.,} \\ \text{(1) as mesmas partes real e imaginária, e (2) o mesmo módulo e argumentos congruentes.} \end{array}} \quad (1.2)$$

Nessa observação, (1) já foi constatado acima, e (2) também pode ser constatada analiticamente: Se $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, então

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 \\ r_1 \operatorname{sen} \theta_1 = r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \end{cases} \stackrel{\star}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \overbrace{r_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \operatorname{sen}^2 \theta_1)}^1 = \overbrace{r_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)}^1 \Leftrightarrow \underline{r_1 = r_2} \\ \text{e} \\ \left. \begin{array}{l} \cos \theta_1 = \cos \theta_2 \\ \operatorname{sen} \theta_1 = \operatorname{sen} \theta_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underline{\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

onde, na passagem \star , cada membro das duas equações foi elevado ao quadrado, e as equações resultantes foram somadas membro a membro.

O número $x - iy$ é o complexo conjugado (ou conjugado complexo) de $z = x + iy$ e é denotado por z^* (ou \bar{z}):

$$z = x + iy \Rightarrow z^* = x - iy.$$

Obviamente $|z^*| = |z|$.

Adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos são definidas como os resultados que se obtêm quando se aplicam as regras que governam os números reais acrescidas da regra $i^2 = -1$. Assim, se

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

então

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

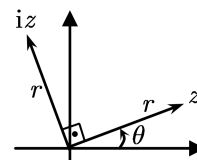
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Em particular:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad z &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \Rightarrow iz = r(-\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta) \\ &= r[\cos(\theta + \pi/2) + i \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)], \end{aligned}$$

isto é, como resultado da multiplicação de i por um número complexo z , obtém-se o vetor z girado de 90° no sentido trigonométrico (v. figura à direita).



$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad z z^* &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(xy - xy) \\ &= x^2 + y^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

Usamos (b) para deduzir que

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{|z_2|^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{se } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Deduzimos agora as seguintes propriedades do módulo de z :

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2) + (x_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2)} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= |z_1| |z_2|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \sqrt{\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2) + (x_2^2 y_1^2 - 2x_2 y_1 x_1 y_2 + x_1^2 y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\
|z^n|_{n \in \mathbb{N}} &= \underbrace{|z z \cdots z|}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{|z| |z| \cdots |z|}_{n \text{ vezes}} = |z|^n.
\end{aligned}$$

Podemos provar que quaisquer números complexos z_1 , z_2 e z_3 satisfazem as seguintes propriedades:

- 1) $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$ são números complexos lei de fechamento
- 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ lei associativa da adição
- 3) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ lei comutativa da adição
- 4) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ lei associativa da multiplicação
- 5) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ lei comutativa da multiplicação
- 6) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ lei distributiva
- 7) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$ existência da identidade (0) da adição
- 8) $z_1 1 = 1 z_1 = z_1$ existência da identidade (1) da multiplicação
- 9) Para um número complexo z qualquer há um único número complexo ζ tal que $z + \zeta = 0$; ζ é denominado inverso aditivo de z e é denotado por $-z$ existência do inverso na adição
- 10) Para um número complexo $z \neq 0$ qualquer há um único número complexo ζ tal que $z \zeta = 1$; ζ é denominado inverso multiplicativo de z e é denotado por z^{-1} ou $1/z$ existência do inverso na multiplicação

Tais propriedades conferem a \mathbb{C} a estrutura de um corpo (ou campo).

Entretanto, \mathbb{C} , em contraste com \mathbb{R} , não é um corpo ordenável, não havendo sentido em desigualdades como $z_1 > z_2$. Em razão disso, estará implícito neste texto que, em qualquer desigualdade, as variáveis ou parâmetros que figurarem nelas são reais. Por exemplo, se $r > 0$, r é um número real positivo.

Teorema de DE MOIVRE

Se $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, então

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]};$$

além disso, para um produto com n fatores ($n \in \mathbb{N}^*$),

$$\boxed{z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]},$$

que, no caso de $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, fornece a fórmula

$$\boxed{z^n = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]}.$$

Eis a prova desse teorema:

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
 &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\
 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad \checkmark \\
 \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{|z_2|^2} \\
 &= \frac{r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]}{r_2^2} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Na literatura é comum escrever a forma polar do número complexo na forma

$$\boxed{z = r \operatorname{cis} \theta}$$

mediante a definição da função

$$\boxed{\operatorname{cis} \theta \equiv \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}.$$

Note que

$$|\operatorname{cis} \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1. \quad (1.3)$$

Nessa notação, com $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, o teorema de DE MOIVRE toma a forma

$$\boxed{z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}, \quad \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \boxed{z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)}. \quad (1.4)$$

Exemplifiquemos o uso da terceira fórmula acima calculando $(1+i)^6$:

$$(1+i)^6 = (\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ)^6 = (\sqrt{2})^6 \operatorname{cis}(6 \times 45^\circ) = \sqrt{8} \operatorname{cis} 270^\circ = -8i.$$

Com a substituição de $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ nas fórmulas em (1.4), deduzimos respectivamente as seguintes:

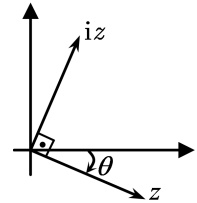
$$\boxed{\operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \boxed{\operatorname{cis} \theta_1 / \operatorname{cis} \theta_2 = \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \boxed{(\operatorname{cis} \theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta)}. \quad (1.5)$$

Observe ainda que, em vista do teorema de DE MOIVRE:

i) As propriedades do módulo (deduzidas na seção 1.1) seguem prontamente:

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|, \quad |z_1 / z_2| = r_1 / r_2 = |z_1| / |z_2|, \quad |z^n| = r^n = |z|^n.$$

ii) $iz = \overset{1}{i} \operatorname{cis}(\pi/2) |z| \operatorname{cis} \theta = |z| \operatorname{cis}(\pi/2 + \theta)$, um resultado já obtido acima: que iz é o vetor z girado de 90° no sentido trigonométrico ($\theta < 0$ na figura à direita).



iii) A verificação das seguintes fórmulas é deixada como exercício:

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}, \quad \boxed{\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2} \quad \text{e} \quad \boxed{\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}.$$

Por exemplo,

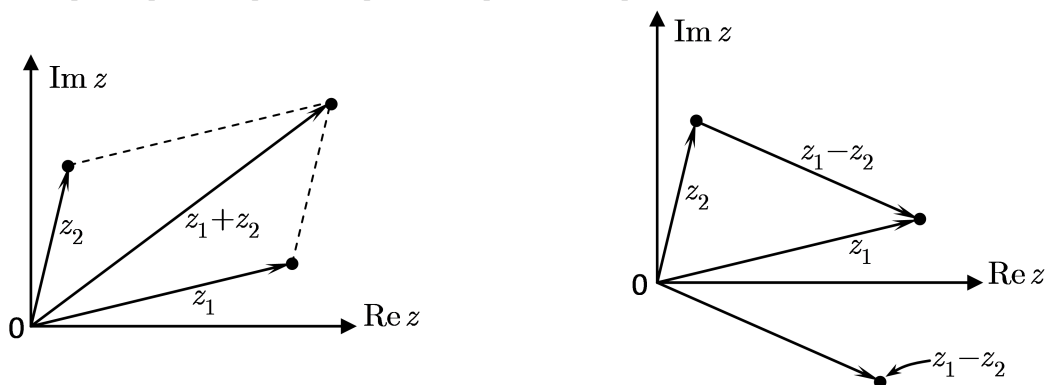
$$z_1 = -1 \Rightarrow \arg z_1 = \pi + 2k_1\pi$$

$$z_2 = -i \Rightarrow \arg z_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi$$

$$\left. \begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 &= \frac{5\pi}{2} + 2(k_1 + k_2)\pi \end{aligned} \right\} \text{argumentos congruentes}$$

$$\left. \begin{aligned} \arg(z_1 / z_2) &= \arg(-i) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \arg z_1 - \arg z_2 &= -\frac{\pi}{2} + 2(k_1 - k_2)\pi \end{aligned} \right\} \text{argumentos congruentes}$$

Em vista da interpretação geométrica dos números complexos como vetores do plano complexo, a definição da adição de números complexos corresponde à adição de vetores do plano, valendo, pois, a regra do paralelogramo (bem como as do triângulo e do polígono). Abaixo são ilustradas a adição e a subtração de números complexos. Nessas figuras, os pontos representam os números complexos, e a extremidade de cada vetor só indica a posição do número complexo se estiver partindo da origem (do ponto $z = 0$); assim, o vetor $z_1 - z_2$ pode estar em qualquer lugar do plano, mas a extremidade dele só indica o número complexo $z_1 - z_2$ quando ele parte da origem. A notação na figura é um tanto ambígua (mas é a normalmente empregada): a de usar $z_1 - z_2$ para denotar tanto o vetor correspondente a esse número complexo quanto o ponto do plano complexo correspondente a ele.



1.2 Propriedades da Conjugação

<p>(i) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$</p> <p>(ii) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$</p> <p>(iii) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$</p> <p>(iv) $(z^*)^* = z$</p>	<p>(v) $z^* = z$</p> <p>(vi) $\frac{z + z^*}{2} = \text{Re } z$</p> <p>(vii) $\frac{z - z^*}{2i} = \text{Im } z$</p> <p>(viii) $\arg(z^*) = -\arg z$</p>
---	--

(1.6)

Prova:

Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$. Temos que:

(i) $(z_1 \pm z_2)^* = [x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)]^* = x_1 \pm x_2 - i(y_1 \pm y_2)$
 $= x_1 - iy_1 \pm (x_2 - iy_2) = z_1^* \pm z_2^* \checkmark$

(ii) $(z_1 z_2)^* = [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)]^* = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
 $z_1^* z_2^* = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ } iguais! \checkmark

(iii) $z \equiv z_1/z_2 \Rightarrow z z_2 = z_1 \Rightarrow (z z_2)^* = z^* z_2^* = z_1^* \Rightarrow z_1^*/z_2^* = z^* = (z_1/z_2)^* \checkmark$

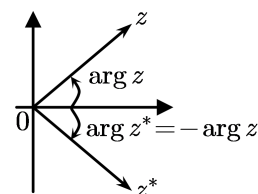
(iv) $(z^*)^* = (x - iy)^* = x + iy = z \checkmark$

(v) $|z^*| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \checkmark$

(vi) $\frac{z + z^*}{2} = \frac{x + iy + (x - iy)}{2} = x = \text{Re } z \checkmark$

(vii) $\frac{z - z^*}{2i} = \frac{x + iy - (x - iy)}{2i} = y = \text{Im } z \checkmark$

(viii) A fórmula $\arg(z^*) = -\arg z$ é geometricamente óbvia: v. figura acima. \checkmark



1.3 Propriedades do módulo e das partes real e imaginária

- (i) $|z| \geq 0$, onde $|z| = 0$ se e só se $z = 0$, (ii) $|z_2 - z_1|$ = distância de z_1 a z_2 ,
 (iii) $\operatorname{Re} z \leq |z|$, (iv) $\operatorname{Im} z \leq |z|$, (v) $|z^*| = |-z| = |z|$,
 (vi) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, (vii) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$,
 (viii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, (ix) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$,
 (x) $|z^n| = |z|^n$, (xi) $\sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{|z|}$,

onde $n \in \mathbb{N}$.

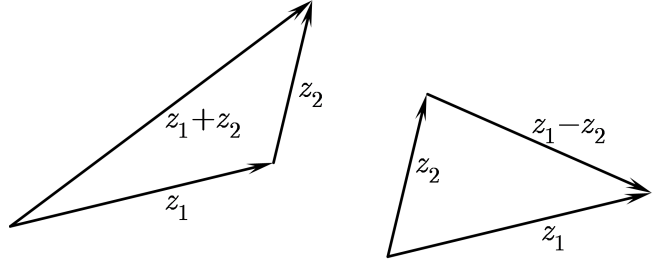
Algumas dessas propriedades já foram deduzidas, e a propriedade (xi) será provada mais adiante, na pág. 17, equação (1.15). Algumas não foram deduzidas por serem simples, sendo então deixadas como exercício.

Por meio da propriedade (ii), e usando conhecidas propriedades dos lados dos triângulos, podemos visualizar geometricamente a validade das chamadas desigualdades triangulares:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{e} \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

A primeira expressa que, num triângulo, nenhum lado tem comprimento maior do que a soma dos comprimentos dos outros dois, e a segunda, que nenhum lado é menor do que a diferença nos comprimentos dos outros dois. A figura à direita ajuda a compreender isso.

Essas desigualdades podem ser provadas analiticamente. Eis a dedução da primeira:



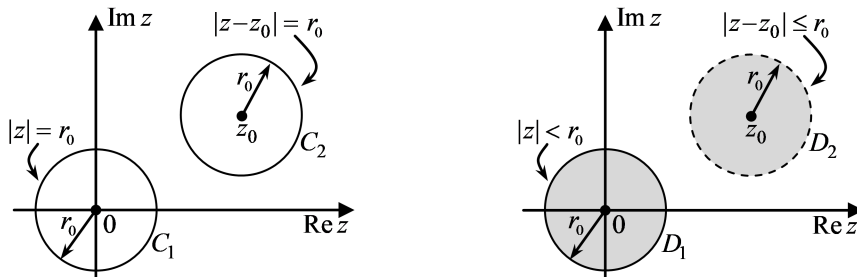
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{(z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^*} = \sqrt{(z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*)} = \sqrt{z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_1 z_2^* + z_1^* z_2} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^*} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*)} \leq \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2^*|} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|} = \sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2} = |z_1| + |z_2| \quad \checkmark \end{aligned}$$

A segunda é obtida da primeira:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} |z_1 - z_2| + |z_2| &\geq |z_1 - z_2 + z_2| = |z_1| &\Rightarrow & |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \\ |z_2 - z_1| + |z_1| &\geq |z_2 - z_1 + z_1| = |z_2| &\Rightarrow & |z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ -|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| &\Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \checkmark \end{aligned}$$

1.4 Conjunto de pontos do plano complexo

Antes de expor esse assunto, convém observar que o lugar geométrico dos pontos do plano complexo que satisfaz a equação $|z| = r_0$ é a circunferência C_1 na figura abaixo, de raio r_0 e centro na origem. Já $|z - z_0| = r_0$ descreve a circunferência C_2 , de raio r_0 e centro no ponto z_0 . Por outro lado, as desigualdades $|z| < r_0$ e $|z - z_0| \leq r_0$ descrevem as regiões D_1 e D_2 limitadas por essas circunferências, D_1 incluindo e D_2 não incluindo os pontos das próprias circunferências.



Pois bem, seguem abaixo várias definições, onde S é um conjunto de pontos qualquer de \mathbb{C} .

a) No plano complexo, o conjunto de todos os pontos z do disco $|z - z_0| < r$, onde $r > 0$ e z_0 é um ponto qualquer de \mathbb{C} , é denominado de disco aberto de raio r e centro z_0 , sendo denotado por $\delta(z_0; r)$ ou, quando não é importante especificar o raio, por $\delta(z_0)$.

Uma vizinhança de z_0 é qualquer conjunto contendo um disco $\delta(z_0)$.

b) Um ponto z_0 de S é denominado ponto interior desse conjunto se existir um disco $\delta(z_0) \subset S$. O conjunto de todos os pontos interiores de S é denominado interior de S .

c) Um conjunto S é dito aberto se todos seus pontos forem pontos interiores.

d) Um conjunto S é dito fechado se o seu complemento $\mathbb{C} - S$ for aberto.

e) Um ponto z_0 de S é dito ponto de fronteira se todo disco $\delta(z_0)$ contiver pelo menos um ponto de S e pelo menos um ponto de $\mathbb{C} - S$.

O conjunto de todos os pontos de fronteira de S é a chamada fronteira de S e é às vezes denotado por ∂S .

f) Um conjunto S é dito limitado se existe $M > 0$ tal que $|z| < M \forall z \in S$. Um conjunto ilimitado é o que não é limitado.

g) Um conjunto S é dito conexo se dois pontos seus quaisquer podem ser conectados por uma linha poligonal inteiramente contida nele.

h) Um conjunto D é chamado domínio se for aberto e conexo.

O conjunto $\bar{D} \equiv D \cup \partial D$ (a união de um domínio D com a sua fronteira ∂D) é chamado de domínio fechado.

1.5 Funções Complexas: Conceitos Preliminares

Quando z designa qualquer número complexo de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$, chamamos z de variável complexa, que toma valores em A .

Dizemos que num conjunto A de pontos do plano de z está definida uma função $f(z)$ se houver uma lei pela qual cada ponto z de A é posto em correspondência com um ponto determinado ou com um conjunto determinado de pontos do plano de w . No primeiro caso, a função $w = f(z)$ é dita univalorada (univalente, unívoca); no segundo, multivalorada (multivalente, plurívoca). O conjunto A é chamado de conjunto de definição, ou, quando for um domínio, que é quase sempre o caso, de domínio de definição. Já o conjunto B de todos os pontos do plano de w que são postos em correspondência com os pontos de A pela função é chamado de conjunto de variação, ou, se for um domínio, de domínio de variação.

Se o conjunto de variação for subconjunto de \mathbb{C} , temos uma função complexa; se for subconjunto de \mathbb{A} , uma função real.

Sejam z e w variáveis complexas, e sejam x , y e u variáveis reais. Observe a nomenclatura:

$w = f(z)$	função complexa de uma variável complexa
$w = f(x)$	função complexa de uma variável real
$y = f(z)$	função real de uma variável complexa
$y = f(x)$	função real de uma variável real
$u = f(x, y)$	função real de duas variáveis reais

A função $w = f(z)$, com $z = x + iy$, tem partes real e imaginária u e v bem definidas e que são funções de x e y :

$$z = x + iy \xrightarrow{f} w = u + iv ,$$

onde

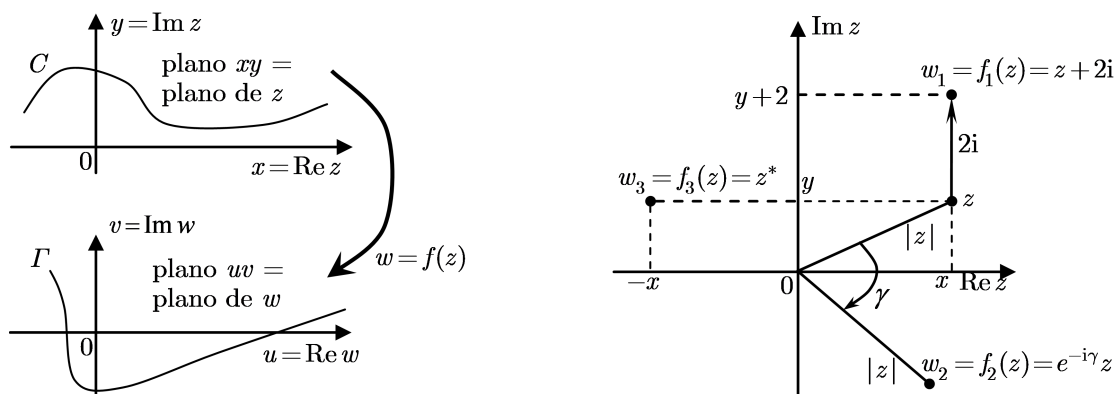
$$f(x + iy) = u + iv \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) = v(x, y) \end{cases} .$$

Logo, a função complexa $w = f(z)$ equivale ao par $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de funções reais de duas variáveis reais. Assim, tanto $f(z)$ quanto o par equivalente $u(x, y)$ e $v(x, y)$ podem ser representados

geometricamente como uma transformação do conjunto A de pontos do plano de z no conjunto B de pontos do plano de w .

Um ponto $P(x, y)$ do plano de z é *transformado* em um ou mais pontos $P'_k(u, v)$ ($k = 1, \dots, n$) do plano de w , sendo P'_k chamado imagem de P pela transformação. Em geral, sob uma transformação, um conjunto de pontos, tal qual a curva C na figura abaixo, à esquerda, é transformado em um conjunto correspondente de pontos, que é a imagem de C , digamos a curva Γ nessa figura. No caso de um função $f(z)$ multivalorada, um ponto ou uma curva do plano de z é transformado, em geral, em mais de um ponto ou mais de uma curva do plano de w .

Para se empregarem certos termos geométricos, tais como translação, rotação e reflexão, é conveniente, às vezes, considerar a transformação ocorrendo num único plano. Como exemplo disso, na figura abaixo, à direita, representamos a função $w_1 = f_1(z) = z + 2i$ (translação de duas unidades para cima), $w_2 = f_2(z) = e^{-i\gamma}z$ (veremos adiante que, por essa função, há uma rotação do vetor z no sentido horário de um ângulo $\gamma > 0$), e $w_3 = f_3(z) = -x + iy = -z^*$ (reflexão em relação ao eixo imaginário).



1.6 Limite e Continuidade

Para uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida univocamente num disco aberto, exceto, possivelmente, no centro $z_0 = x_0 + iy_0$ desse disco, dizemos que

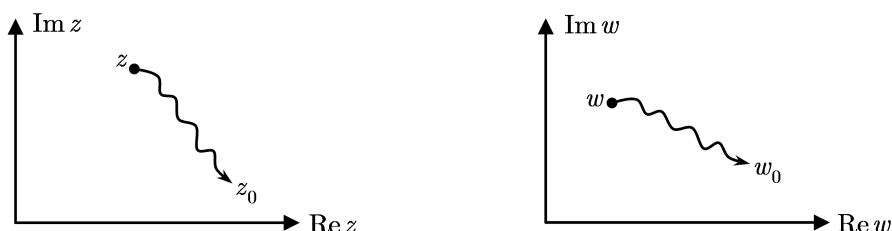
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 \quad \text{se} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0 .$$

Como tal definição de limite de uma função complexa baseia-se na de funções reais, valem para aquela as mesmas propriedades que valem para estas; em particular,

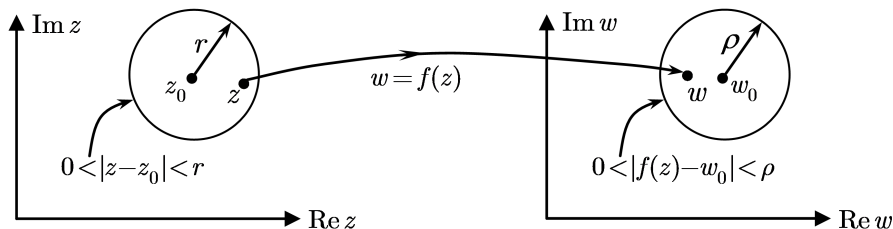
$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g, \quad \lim(fg) = (\lim f)(\lim g), \quad \lim(f/g) = (\lim f)/(\lim g),$$

se $\lim f$ e $\lim g$ existem, e $\lim g \neq 0$ na última propriedade acima.

A definição de limite pode ainda ser dada através da noção de vizinhança. Basta observar que a notação $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ [em palavras: w_0 é o limite de $f(z)$ quando z tende a z_0 , ou $f(z)$ tende a w_0 quando z tende a z_0] expressa intuitivamente que pontos cada vez mais próximos de w_0 (no plano de w) são imagens de pontos cada vez mais próximos de z_0 (no plano de z). Isso é o que ilustra a figura abaixo.



Numa linguagem um pouco mais matemática, podemos dizer que um disco $\delta(w_0, \rho)$ de raio ρ arbitrariamente pequeno sempre contém a imagem de algum disco $\delta(z_0, r)$ sem o seu ponto central z_0 (essa exclusão do centro do disco é explicada adiante). Isto é ilustrado abaixo:

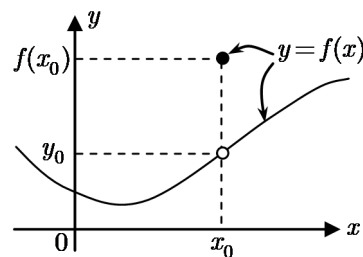


Assim, a definição de limite que incorpora a ideia explicada acima é dada matematicamente como segue:

Diz-se que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ quando, dado ρ positivo e arbitrariamente pequeno, existe $r > 0$ tal que, se $0 < |z - z_0| < r$, então $|f(z) - w_0| < \rho$.

Convém enfatizar que, de acordo com essa definição, a função $f(z)$ tende ao limite w_0 independentemente da maneira como o ponto z tenda para z_0 . Em outras palavras, se o limite existe, então, quando z tende a z_0 segundo uma regra qualquer (por exemplo, segundo uma sequência de pontos ou uma curva), $f(z)$ tende àquele limite w_0 .

O limite w_0 de uma função $f(z)$ num ponto z_0 independe da definição do valor $f(z_0)$ nesse ponto. Por exemplo, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à direita ilustra este fato, no qual $f(x_0) \neq y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Pode até acontecer que o limite num ponto exista, mas a função em tal ponto não seja definida, como é o caso da função $(\sin x)/x$, indefinida em $x = 0$, onde seu limite é 1. Portanto, na definição do limite $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, o ponto z_0 deve ser excluído do disco centrado nele, evitando-se a exigência da validade da desigualdade $|f(z_0) - w_0| < \rho$, que só é satisfeita para uma classe especial de funções, as chamadas "contínuas no ponto z_0 ", definidas a seguir.



Dizemos que a função $f(z)$ é contínua no ponto z_0 quando, neste ponto, o valor-limite é igual ao valor de definição: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Logo, $f(z)$ não é contínua no ponto z_0 se: (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ não existe; (b) $f(z_0)$ não é definido; (c) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ e $f(z_0)$ existem, mas são diferentes. É evidente que a continuidade de $f(z)$ em z_0 é necessária e suficiente para que, no ponto (x_0, y_0) , sejam contínuas as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que compõem as partes real e imaginária dessa função complexa.

A função $f(z)$ é dita contínua num domínio se for contínua em cada ponto desse domínio.

1.7 Diferenciabilidade e Analiticidade

Considere uma função definida num disco $\delta(z_0)$. Dizemos que $f(z)$ é diferenciável (ou derivável) no ponto z_0 se existir o seguinte limite, denotado por $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \left[= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right],$$

cujos denominamos derivada de $f(z)$ em z_0 .

Uma função $f(z)$ diferenciável em cada ponto de um domínio D é dita analítica (ou regular) nesse domínio; dizemos que D é um domínio de analiticidade de $f(z)$. Uma função é analítica num ponto z_0 se este tiver uma vizinhança em que ela é analítica. O ponto onde uma função deixa de ser analítica é chamado de singularidade. Nessas definições de função analítica, a função é presumida univalorada no domínio D , pois as noções de limite e de derivada foram definidas acima apenas para funções unívocas. Mais tarde generalizaremos o conceito de analiticidade para englobar as funções multivaloradas; por enquanto, apenas funções univaloradas podem ser analíticas.

As condições de diferenciabilidade de uma função $f(z)$ em termos das funções que compõem suas parte real e imaginária são dadas pelo seguinte teorema:

Teorema: Considere uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida numa vizinhança de $z_0 = x_0 + iy_0$ e tal que u e v sejam *diferenciáveis* no ponto (x_0, y_0) . A validade neste ponto das equações (ou condições) de CAUCHY-RIEMANN $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ é condição necessária e suficiente para a diferenciabilidade de $f(z)$ em z_0 .

Corolário: A validade das equações de Cauchy-Riemann num domínio D é condição necessária e suficiente para a analiticidade de $f(z)$ em D .

Convém ressaltar que, em vez das hipóteses de u e v serem diferenciáveis em (x_0, y_0) , encontramos frequentemente na literatura a de que essas funções sejam da classe C^1 neste ponto. Isso não altera o teorema, porque a diferenciabilidade é garantida pela continuidade das suas derivadas parciais primeiras.

Abaixo, abreviamos "condições de Cauchy-Riemann" por simplesmente "condições CR".

Vamos provar a *necessidade* das condições CR, isto é, que se $f'(z_0)$ existir então necessariamente as condições CR são válidas. Nesse intuito, calculemos o limite que define $f'(z_0)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h},$$

nos casos particulares de $h \rightarrow 0$ paralelamente aos eixos real (i.e., com $h = \xi \in \mathbb{R}$) e imaginário (i.e., com $h = i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \lim_{h = \xi \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + \xi) - f(x_0 + iy_0)}{\xi} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \xi + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{\xi} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \xi, y_0) + iv(x_0 + \xi, y_0) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\xi} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \xi, y_0) - u(x_0, y_0)}{\xi} + i \frac{v(x_0 + \xi, y_0) - v(x_0, y_0)}{\xi} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \quad [\text{I}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h = i\eta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + i\eta) - f(x_0 + iy_0)}{i\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f[x_0 + i(\eta + y_0)] - f(x_0 + iy_0)}{i\eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \eta) + iv(x_0, y_0 + \eta) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \eta) - u(x_0, y_0)}{i\eta} + i \frac{v(x_0, y_0 + \eta) - v(x_0, y_0)}{i\eta} \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \quad [\text{II}] \end{aligned}$$

Se a derivada $f'(z_0)$ existir, então o limite que a define deve existir independentemente do modo como $h \rightarrow 0$, ou seja, os dois resultados [I] e [II] acima devem ser iguais, o que acarreta nas condições CR no ponto z_0 :

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \Rightarrow \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Para referência futura, destaquemos as duas expressões de $f'(z_0)$ deduzidas acima, mas com z em vez de z_0 :

$$\boxed{f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y} \quad (1.7)$$

Não provaremos a *suficiência* das condições CR, isto é, que se as condições CR forem válidas então a existência de $f'(z_0)$ está garantida.

Visto que as propriedades ordinárias das operações algébricas e de limite são conservadas na pas-

sagem para as funções complexas, as regras de diferenciação usuais também são; portanto,

- $[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z)$
- $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $[f(z)/g(z)]' = [f'(z)g(z) - f(z)g'(z)]/g^2(z)$
- $\{f[g(z)]\}' = f'[g(z)]g'(z)$
- $f'(z) = 1/(f^{-1})'(w)$, onde $w = f(z)$

Considere, por exemplo, a função $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy)$, caso em que $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Como em todo o plano complexo temos que $u_x = v_y = 2x$ e $u_y = -v_x = -2y$, isto é, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, e também que u e v são da classe C^1 (e portanto diferenciáveis), podemos concluir que $f(z)$ é analítica em todo o plano complexo.

A seguir, cada função elementar de uma variável real é estendida de modo a ser definida para uma variável complexa. Tal extensão, às vezes, enriquece a função com novas propriedades. Por exemplo, a função exponencial de uma variável complexa e^z torna-se periódica, as funções $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ deixam de ser limitadas, o logaritmo de números negativos (em verdade, de qualquer número complexo não nulo) ganha sentido, etc.

1.8 A Função Potência $w = z^k$ (k inteiro)

Por definição,

$$z^n \equiv \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ vezes}} \text{ se } n = 1, 2, 3, \dots$$

As fórmulas $z^m z^n = z^{m+n}$, $z^m/z^n|_{m>n} = z^{m-n}$ e $z^m/z^n|_{m<n} = 1/z^{n-m}$ (m e n naturais não nulos) seguem diretamente da definição acima. As duas últimas podem ser unificadas na forma $z^m/z^n = z^{m-n}$ para quaisquer valores naturais de m e n mediante as definições

$$z^0 \equiv 1 \quad \text{e} \quad z^{-n}|_{n \geq 1} \equiv 1/z^n.$$

Por exemplo, se desejamos que $1/z^2 = z^3/z^5$ seja $z^{3-5} = z^{-2}$ e que $1 = z^2/z^2$ seja $z^{2-2} = z^0$, é necessário definir $1/z^2 \equiv z^{-2}$ e $1 \equiv z^0$. As definições acima também justificam a notação z^{-1} do inverso multiplicativo $1/z$ de z (v. a propriedade 10 do corpo dos complexos na pág. 3): $1/z = z^0/z^1 = z^{0-1} = z^{-1}$.

Estão assim definidas as potências *inteiras* z^k , $k \in \mathbb{Z}$. Tais potências apresentam as seguintes propriedades para quaisquer inteiros k e l , cuja verificação deixamos como exercício:

$$z^k z^l = z^{k+l}, \quad z^k/z^l = z^{k-l}, \quad (z_1 z_2)^k = z_1^k z_2^k, \quad (z_1/z_2)^k = z_1^k/z_2^k, \quad (z^k)^l = z^{kl}.$$

O cálculo de z^n , com n natural, é mais fácil com z expresso na forma polar por causa do teorema de DE MOIVRE:

$$z^n|_{n \in \mathbb{N}} = (r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta,$$

fórmula que também vale para expoente k inteiro:

$$z^k|_{k \in \mathbb{Z}} = (r \operatorname{cis} \theta)^k = r^k \operatorname{cis} k\theta.$$

A validade dessa fórmula para $k = -n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) é provada como segue (onde $z = r \operatorname{cis} \theta$):

$$\begin{aligned} z^k|_{k=-n} &= \frac{1}{z^n} = \frac{1}{(r \operatorname{cis} \theta)^n} = \frac{1}{r^n \operatorname{cis} n\theta} = r^{-n} \frac{1}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \frac{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta} \\ &= r^{-n} \frac{\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)}{|\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta|^2} = r^{-n} \frac{\operatorname{cis}(-n\theta)}{1} = r^k \operatorname{cis} k\theta \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observe que a função $f(z) = z^n$ é analítica em todo o plano complexo, visto que, para todo z complexo, existe o limite que fornece a derivada dessa função, obtida usando o binômio de NEWTON:

$$\begin{aligned} (z^n)' &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cancel{z^n} + C_1^n z^{n-1}h + C_2^n z^{n-2}h^2 + C_3^n z^{n-3}h^3 + \dots + h^n - \cancel{z^n}}{h} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (nz^{n-1} + C_2^n z^{n-2}h + C_3^n z^{n-3}h^2 + \dots + h^{n-1}) = nz^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

fórmula também válida para expoente k inteiro:

$$(z^k)' = kz^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

De fato, se $k = -n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), então

$$(z^k)' \Big|_{k=-n} = \left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{0 - (z^n)'}{(z^n)^2} = \frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{n-1-2n} = -nz^{-n-1} = kz^{k-1} \checkmark$$

1.9 A Função Exponencial

Para todo $z = x + iy$ complexo, a função exponencial e^z pode ser assim definida:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \equiv e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^{\operatorname{Re} z} [\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)] = e^{\operatorname{Re} z} \operatorname{cis}(\operatorname{Im} z). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nota: O aluno que achar a definição acima muito formal pode adotar, por analogia com a função exponencial de variável real, a que é dada pela fórmula

$$e^z \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n.$$

O resultado dessa definição é o mesmo em (1.8):

$$e^z \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(1 + z/n)^n}_{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \operatorname{cis}(\arg z_n) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \right] \left[\operatorname{cis} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n \right) \right] = e^x \operatorname{cis} y.$$

Para demonstrar isso, é necessário provar esse resultado do limite da sequência de números complexos $z_n = (1 + z/n)^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Nesse sentido, provamos abaixo os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = e^x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = y + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), onde $x + iy = z$.

Temos que

$$|z_n| = |1 + x/n + iy/n|^n = [(1 + x/n)^2 + y^2/n^2]^{n/2} = [1 + 2x/n + (x^2 + y^2)/n^2]^{n/2},$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + 2x/n + (x^2 + y^2)/n^2]^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x/n)^{n/2} \stackrel{N \equiv n/2}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N = e^x \checkmark.$$

Também temos que

$$\arg z_n = n \arg(1 + x/n + iy/n) = n(2j\pi + \delta_n + \arctan r_n) \stackrel{(\dagger)}{=} 2k\pi + n\left(\delta_n + r_n - \frac{1}{3}r_n^3 + \dots\right), \text{ com } r_n \equiv \frac{y/n}{1 + x/n},$$

onde $j \in \mathbb{Z}$, $k \equiv nj$, δ_n é igual a 0 se $1 + x/n + iy/n$ for do 1º ou 4º quadrante e é igual a π se for do 2º ou 3º quadrante, e, na passagem (\dagger) , usamos a expansão de Taylor do arco tangente. Temos então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(z_n) = 2k\pi + \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(r_n - \frac{1}{3}r_n^3 + \dots\right) = 2k\pi + \lim_{n \rightarrow \infty} nr_n = 2k\pi + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{1 + x/n} = y + 2k\pi \checkmark$$

onde, para efetuar esse limite, notamos que existe um natural \bar{n} tal que, para $n > \bar{n}$, $1 + x/n > 0$, ou seja, $1 + x/n + iy/n$ é um ponto do 1º ou 4º quadrante e, portanto, $\delta_n = 0$; além disso, podemos desprezar termos menores do que os da ordem de $1/n$.

É fácil mostrar que a função exponencial assim definida tem as seguintes propriedades:

- 1] A função exponencial complexa e^z coincide com a função exponencial real e^x se $z = x \in \mathbb{R}$.

Na verdade, todas as funções elementares reais são estendidas ao domínio complexo de modo que essa propriedade de coincidência seja válida (como há de ser) e que elas sejam analíticas.

- 2] Se $z = x + iy$, então inferimos diretamente da definição de e^z as relações

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x \quad \text{e} \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z + 2k\pi = y + 2k\pi.$$

- 3] Continuam válidas para a exponencial complexa e^z ($z \in \mathbb{C}$) as conhecidas fórmulas para a exponencial real e^x ($x \in \mathbb{R}$):

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \quad (e^z)^k \Big|_{k \in \mathbb{Z}} = e^{kz}, \quad e^z \neq 0 \quad \forall z \quad (\text{pois } |e^z| = e^x > 0).$$

4] $(e^z)^* = e^{(z^*)}$, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \underbrace{\text{cis } 2\pi}_1 = e^z$ (i.e., e^z é periódica, sendo o período igual a $2\pi i$).

5] A função e^z é analítica em todo o plano complexo, valendo a conhecida fórmula $(e^z)' = e^z$.

6] Em particular, fazendo $x = 0$ e $y = \theta$ na definição de e^z acima, obtemos a famosa fórmula de EULER:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \text{cis } \theta} . \quad (1.9)$$

Em virtude dessa fórmula, todo número complexo z pode ser representado na chamada forma exponencial, dada abaixo logo após as outras duas representações já vistas, a cartesiana e a polar:

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}, \text{ onde } r = |z| \text{ e } \theta = \text{Arg } z} .$$

A seguir deduzimos as propriedades acima que ainda não se encontram verificadas:

- As propriedades em [3] são assim deduzidas:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} \left\{ \cos y_1 \cos y_2 - y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1) \right\} \\ &= e^{x_1+x_2} \left\{ \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \right\} \\ &= e^{\text{Re}(z_1+z_2)} \left\{ \cos [\text{Im}(z_1 + z_2)] + i \sin [\text{Im}(z_1 + z_2)] \right\} = e^{z_1+z_2} \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x+i(-y)} = e^{-x}[\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^{-x}[\cos y - i \sin y] \\ &= \frac{\cos y - i \sin y}{e^x} \frac{\cos y + i \sin y}{\cos y + i \sin y} = \frac{1}{\cos y + i \sin y} = \frac{1}{e^z} \checkmark \end{aligned}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} e^{-z_2} = e^{z_1-z_2} \checkmark$$

Para $n = 1, 2, 3 \dots$, temos que

$$\left. \begin{aligned} \text{Se } k = n : \quad (e^z)^k &= (e^z)^n = \underbrace{e^z \dots e^z}_{n \text{ vezes}} = e^{z+\dots+z} = e^{nz} = e^{kz} \\ \text{Se } k = -n : \quad (e^z)^k &= (e^z)^{-n} = \frac{1}{(e^z)^n} = \frac{1}{e^{nz}} = e^{-nz} = e^{kz} \\ \text{Se } k = 0 : \quad (e^z)^k &= (e^z)^0 = 1 = e^{0z} = e^{kz} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (e^z)^k = e^{kz} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

- A primeira propriedade em [4]:

$$(e^z)^* = (e^{x+iy})^* = (e^x[\cos y + i \sin y])^* = e^x[\cos y - i \sin y] = e^x[\cos(-y) - i \sin(-y)] = e^{x+i(-y)} = e^{z^*} \checkmark$$

• Em [5], a analiticidade de e^z decorre do fato de que, em qualquer ponto do plano complexo, as derivadas parciais das partes real, $e^x \cos y$, e imaginária, $e^x \sin y$, têm derivadas parciais primeiras contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = v_y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) \quad \text{e} \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -v_x = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) \quad \checkmark$$

Calculamos a derivada de e^z usando a fórmula $f'(z) = u_x + iv_x$ em (1.7):

$$(e^z)' = u_x + iv_x = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z \quad \checkmark$$

Uma vez que as propriedades em [3] são as mesmas costumeiras das exponenciais reais, a multiplicação, a divisão e a potenciação de números complexos escritos na forma exponencial tornam-se operações familiares. Observe isso no cálculo daquelas operações em (1.4):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \cdots r_n e^{i\theta_n} = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_n)} . \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} . \\ z^n &= (r e^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)} . \end{aligned}$$

Esses resultados tomam a mesma forma daqueles em (1.4) se a equação (1.9) for usada para substituir cada exponencial $e^{i\phi}$ por $\text{cis } \phi$.

1.10 A Função Logarítmica

A função logarítmica complexa $f(z) = \log z = w$ é definida como a função inversa da função exponencial complexa, sendo o valor w de $\log z$, portanto, tal que $f^{-1}(w) = e^w = z$. Essa definição é sucintamente expressa pela seguinte proposição:

$$\log z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = e^w . \quad (1.10)$$

Vamos calcular $\log z = u + iv$ em função de $z = |z| e^{i\theta}$, sendo θ uma determinação qualquer, mas fixa, de z :

$$\log z = u + iv \quad \Rightarrow \quad z = e^{u+iv} \quad \Rightarrow \quad |z| e^{i\theta} = e^u e^{iv} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |z| = e^u \Rightarrow u = \ln |z| \\ v = \theta + 2k\pi = \arg z , \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{\log z = \ln |z| + i \arg z} , \quad (1.11)$$

onde "ln" denota a função logarítmica ordinária, de variável real^(*), e $\arg z$ é a função multivalorada formada por todas as determinações do argumento de z , dada por (1.1).

Vejamos algumas propriedades dos logaritmos.

Com $f(z) = \log z$ e $f^{-1}(z) = e^z$, a relação de composição $f^{-1} \circ f(z) = z$ continua válida:

$$f^{-1} \circ f(z) = e^{\log z} = e^{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)} = \underbrace{e^{\ln |z|}}_{|z|} e^{i \arg z} \underbrace{e^{i2k\pi}}_1 = |z| e^{i \arg z} = z \quad \checkmark$$

Já $f \circ f^{-1}(z)$ nem sempre é z , porque a função multivalorada $f(z) = \log z$ é computada por último nessa composição:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(z) &= \log e^z = \ln |e^z| + i \arg e^z = \ln e^{\text{Re } z} + i [\text{Im } z + 2k\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &= \text{Re } z + i \text{Im } z + 2k\pi i = z + 2k\pi i \quad (= z \text{ apenas quando } k = 0) . \end{aligned}$$

Em resumo,

$$e^{\log z} = z \quad \text{e} \quad \log e^z = z + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}) . \quad (1.12)$$

Vejamos agora mais as seguintes propriedades, deduzidas usando-se (1.12) bem como as propriedades da função exponencial:

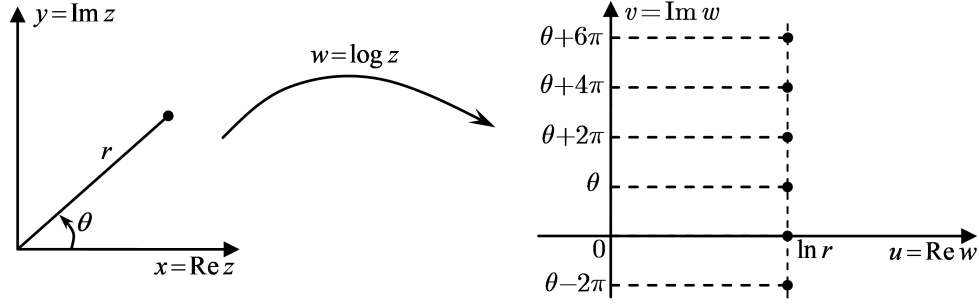
$$\log(z_1 z_2) = \log(e^{\log z_1} e^{\log z_2}) = \log(e^{\log z_1 + \log z_2}) = \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i .$$

$$\log(z_1 / z_2) = \log(e^{\log z_1} / e^{\log z_2}) = \log(e^{\log z_1 - \log z_2}) = \log z_1 - \log z_2 + 2k\pi i .$$

$$\log z^n \Big|_{n \in \mathbb{N}_+} = \log(e^{\log z})^n = \log(e^{n \log z}) = n \log z + 2k\pi i .$$

(*) O emprego de símbolos distintos para a função logarítmica de variável complexa e a de variável real evita absurdos. De fato, na equação (1.11), se designássemos com o mesmo símbolo \ln essas duas funções, e substituíssemos, por exemplo, $z = 2 = 2 \text{ cis } 2\pi$ (estamos considerando o argumento 2π do número real e complexo 2), aquela equação seria inadequadamente expressa por $\ln 2 = \ln 2 + 2\pi i$, em vez da notação adotada e mais consistente $\text{Log } 2 = \ln 2 + 2\pi i$.

A equação (1.11) mostra que $\log z$ é uma função multivalorada, com uma infinidade de determinações, advindas da infinidade de determinações do argumento de z . A figura abaixo mostra que todas as determinações de um certo complexo z estão sobre uma reta vertical.



Em analogia com as notações $\text{Arg } z$ e $\arg z$, pelo símbolo $\text{Log } z$ designaremos uma das determinações de $\log z$, e, caso seja necessário, indicaremos a determinação $\text{Log } z$ escolhida. Como a determinação do argumento de z fixa uma determinação do logaritmo de z , temos que

$$\text{Log } z = \ln z + i \text{Arg } z .$$

Em todo domínio D que não contenha nenhuma curva fechada cercada a origem, podemos escolher um conjunto infinito de ramos contínuos e unívocos da função multivalorada $w = \log z$, cujas determinações em cada ponto fixo diferem de múltiplos de $2\pi i$. Cada ramo $w = \text{Log } z$ realiza uma transformação biunívoca dos pontos do domínio D e, portanto, de acordo com o teorema da derivada da função inversa, ele possui a derivada

$$(\text{Log } z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} .$$

Assim, todos os ramos de $\log z$ são funções analíticas.

1.11 A Função Raiz Enésima $w = \sqrt[n]{z}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

A função raiz enésima $\sqrt[n]{z}$ é definida como a inversa da função potência z^n . Partindo dessa definição, vejamos como calcular $w = \sqrt[n]{z}$ ($n = 2, 3, \dots$).

Por definição, se $w = \sqrt[n]{z}$, então $w^n = z$, equação que, com as substituições $w = |w| e^{i \arg w}$ e $z = |z| e^{i \arg z}$, fornece

$$w^n = [|w| e^{i \arg w}]^n = |w|^n [e^{i \arg w}]^n = |w|^n e^{in \arg w} = |z| e^{i \arg z} ,$$

donde, de acordo com (1.2), concluímos que $|w|^n = |z|$ e $n \arg w = \arg z$, e, portanto, que

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{e} \quad \arg w = \frac{\arg z}{n} .$$

Assim, temos que

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z}} = |w| e^{i \arg w} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}} . \quad (1.13)$$

Se $\text{Arg } z = \theta$ é a determinação escolhida (a principal) para o argumento de z , então todas as suas determinações, de acordo com (1.1) são dadas por

$$\arg z = \theta \pm 2j\pi \quad (j \in \mathbb{N}) ,$$

donde

$$\frac{\arg z}{n} = \frac{\theta \pm 2j\pi}{n} = \frac{\theta}{n} \pm \frac{j}{n} 2\pi .$$

Acima, a divisão de naturais j/n é igual a algum natural m mais a fração k/n , onde k é o resto da divisão, igual a $0, 1, 2, \dots$ ou $n-1$. Assim, substituindo $j/n = m + k/n$ na equação anterior, obtemos

$$\frac{\arg z}{n} = \frac{\theta}{n} \pm \left(m + \frac{k}{n}\right) 2\pi = \frac{\theta}{n} \pm 2m\pi \pm \frac{2\pi}{n} k ,$$

donde

$$e^{i \frac{\arg z}{n}} = e^{i \left(\frac{\theta}{n} \pm 2m\pi \pm \frac{2\pi k}{n} \right)} = e^{i \left(\frac{\theta}{n} \pm \frac{2\pi k}{n} \right)} .$$

A substituição desse resultado na equação (1.13) fornece

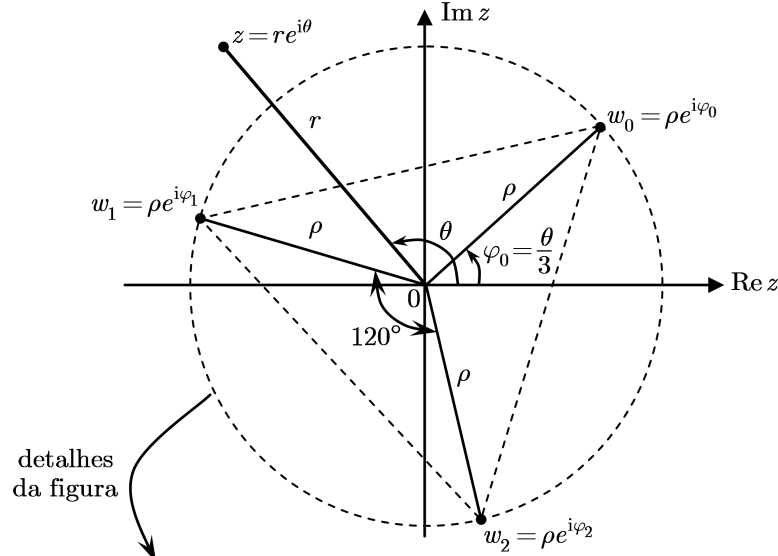
$$w = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left(\frac{\theta}{n} \pm \frac{2\pi k}{n} \right)} .$$

Assim concluímos que a função $w = \sqrt[n]{z}$ é multivalorada, associando cada z a n raízes enésimas dadas por

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left(\frac{\text{Arg } z}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)} , \quad (1.14)$$

onde preferimos usar, em vez de θ , a notação $\text{Arg } z$ (a determinação escolhida para o argumento de z). Note que descartamos o sinal "-" em " \pm ": após interpretarmos o resultado acima, ficará claro que o sinal negativo leva às mesmas raízes enésimas que o sinal positivo, bastando então adotar um deles.

Como estão dispostas no plano complexo as n raízes enésimas de $z = r \text{ cis } \theta$ dadas por (1.14)? Para responder, observemos, primeiramente, que todas elas têm o mesmo módulo $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$. Isso significa que elas estão sobre a circunferência de raio $\rho = \sqrt[n]{|z|}$. Elas só diferem no argumento $\varphi_k = \frac{\text{Arg } z}{n} + \frac{2\pi k}{n}$. Note, entretanto, que o ângulo entre os vetores associados a duas raízes consecutivas $w_k = \rho e^{i\varphi_k}$ e $w_{k+1} = \rho e^{i\varphi_{k+1}}$ é constante, dado por $\varphi_{k+1} - \varphi_k = 2\pi/n$. Ora, estando uniformemente distribuídas sobre a citada circunferência, concluímos que essas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência. A figura abaixo ilustra isso com $n = 3$.



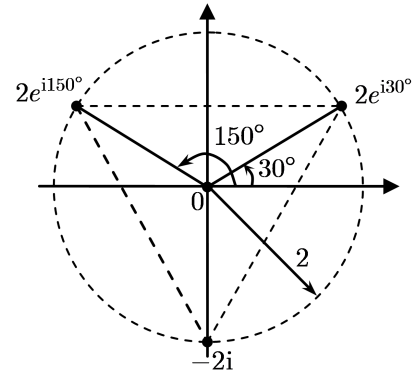
$$\begin{aligned} z &= r \text{ cis } \theta \\ \rho &= \sqrt[3]{r} \\ \angle(w_0, w_1) &= \angle(w_1, w_2) = \angle(w_2, w_3) = 2\pi/3 = 120^\circ \\ \varphi_0 &= \theta/3 \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + 2\pi/3 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + 2\pi/3 \\ w_k &= \sqrt[3]{z} = \rho \text{ cis } \varphi_k \quad (k = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

Exemplo – as raízes cúbicas de $z = 8i$:

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8e^{i(\pi/2+2k\pi)}} = \sqrt[3]{8} e^{i(\frac{\pi/2}{3} + \frac{2\pi}{3}k)} = \sqrt[3]{8} e^{i(30^\circ + 120^\circ k)}$$

$$\equiv w_k = \begin{cases} 2e^{i30^\circ} = 2(\sqrt{3}/2 + i/2) = \sqrt{3} + i = w_0 \\ 2e^{i150^\circ} = 2(-\sqrt{3}/2 + i/2) = -\sqrt{3} + i = w_1 \\ 2e^{i270^\circ} = 2(-i) = -2i = w_2 \end{cases}$$

Essas três raízes cúbicas de $8i$ são mostradas à direita. Elas podem ser comprovadas mostrando-se que $(-2i)^3 = (\sqrt{3} + i)^3 = (-\sqrt{3} + i)^3 = 8i$.



O exemplo acima serve para explicar duas maneiras simplificadas, frequentemente possíveis, de se calcularem as raízes: a) Basta calcular w_0 e então girar essa raiz duas vezes de 120° , obtendo-se assim as outras duas, w_1 e w_2 , cujos valores são facilmente obtidos por simetria. b) Mais simples ainda: não se calcula w_0 , mais infere-se a raiz óbvia $-2i$, da qual, por dois giros de 120° , obtêm-se as outras duas. Para $n \neq 3$, gira-se w_0 ou a raiz óbvia $n-1$ vezes de $360^\circ/n$.

Notas:

1) De (1.14), deduzimos que

$$|\sqrt[n]{z}| = \left| \sqrt[n]{|z|} \underbrace{\text{cis} \left(\frac{\text{Arg } z}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right)}_1 \right| = \sqrt[n]{|z|}. \quad (1.15)$$

Essa é a propriedade **(xi)** listada na seção 1.3.

2) No cálculo de raízes quadradas de números complexos cujos argumentos *não* são ângulos notáveis ($0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ \dots$), o seguinte método é mais conveniente:

$$\begin{aligned} \sqrt{3+4i} &\equiv x+iy \Rightarrow 3+4i = (x+i)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 4 \Rightarrow y = 2/x \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} &\Rightarrow x^2 - (2/x)^2 = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (não serve, pois } x \in \mathbb{R}) \\ \text{ou} \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = 2/(\pm 2) = \pm 1 \end{cases} \\ \therefore \sqrt{3+4i} &= \pm(2+i) \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{Comprovação: } [\pm(2+i)]^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i.$$

3) A resolução da equação do 2º grau pela clássica fórmula quadrática,

$$az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac,$$

continua válida com coeficientes a, b e c complexos, pois todas as operações realizadas em sua dedução continuam válidas no domínio complexo. Em particular, note que $\sqrt{\Delta}$ possui dois valores.

Por exemplo, vamos fatorar $P(z) = (1+i)z^2 + (1-3i)z - 6 + 8i$ em monômios:

$$P(z) = 0 \Rightarrow z = \frac{-(1-3i) + \sqrt{\Delta}}{2(1+i)}.$$

Calculemos as duas raízes quadradas de Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{(1-3i)^2 - 4(1+i)(-6+8i)} = \sqrt{48-14i} \equiv x+iy \\ \Rightarrow 48-14i &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow \begin{cases} 2xy = -14 \Rightarrow y = -7/x \\ x^2 - y^2 = 48 \end{cases} \\ x^2 - \frac{49}{x^2} &= 48 \Rightarrow x^4 - 48x^2 - 49 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (não serve, pois } x \in \mathbb{R}) \\ x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow y = -7/(\pm 7) = \pm(-1) \end{cases} \\ \therefore \sqrt{\Delta} &= \pm 7 \pm (-1)i = \pm(7-i). \end{aligned}$$

Portanto, as raízes são

$$z = \frac{-(1-3i) \pm (7-i)}{2(1+i)} = \begin{cases} \frac{6+2i}{2(1+i)} = \frac{3+i}{1+i} = 2-i \\ \frac{-8+4i}{2(1+i)} = \frac{-4+2i}{1+i} = -1+3i. \end{cases}$$

Finalmente, podemos fatorar o polinômio dado:

$$P(z) = (1+i)(z-2+i)(z+1-3i) \blacksquare$$

Vimos acima que a função raiz enésima não é univalorada, apresentando n determinações se $z \neq 0$: os n valores de $\sqrt[n]{z}$. Também vimos que certa determinação de $\sqrt[n]{z}$ decorre da determinação escolhida para o argumento de z , e isto se deve ao termo $(\arg z)/n$ em (1.13). Pois bem, resumindo este assunto um tanto complicado, podemos afirmar que, em qualquer domínio D do plano complexo que não contenha alguma curva fechada cercando a origem, podemos definir n funções contínuas e univaloradas, cada uma coincidindo com uma determinação de $\sqrt[n]{z}$. Tais n funções são chamadas de ramos da função multivalorada $\sqrt[n]{z}$, por meio das quais, a cada ponto fixo z , associam-se as n determinações da raiz. [No caso da inversa da função real de variável real $y = x^2$, visualizamos os dois ramos $x = \sqrt{y}$ e $x = -\sqrt{y}$ ($y > 0$) como os dois ramos da parábola que compõem seus gráficos.]

Cada um desses n ramos, evidentemente, realiza uma transformação biunívoca dos pontos de D , e, por esta razão, em cada ponto desse domínio, o teorema da derivada da função inversa é válido, pelo qual a derivada

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{w}{nw^n} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$$

é bem definida. Por conseguinte, um ramo qualquer assim construído é uma função analítica no domínio D . Se escrevermos $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, a equação acima toma a forma mais mnemônica da derivada de potências:

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

1.12 As Funções Trigonômicas

As funções trigonométricas no domínio complexo são expressas simplesmente por meio da função exponencial complexa. Para a variável real x , a fórmula de Euler, equação (1.9), fornece

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

donde

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.16)$$

Em vista disso, para qualquer z complexo, toma-se por definição

$$\boxed{\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}. \quad (1.17)$$

As demais funções trigonométricas são definidas a partir das funções $\sin z$ e $\cos z$:

$$\tan z \equiv \sin z / \cos z, \quad \cot z \equiv \cos z / \sin z, \quad \sec z \equiv 1 / \cos z, \quad \csc z \equiv 1 / \sin z.$$

As funções assim definidas:

1) para $z = x \in \mathbb{R}$, coincidem com as funções trigonométricas de variável real.

2) satisfazem as relações trigonométricas ordinárias:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1, & \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z & \sin(\pi/2 - z) &= \cos z, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

3) satisfazem as fórmulas ordinárias de derivação:

$$(\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \quad (\operatorname{sen} z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z, \quad \text{etc.}$$

4) têm a mesma periodicidade apresentada no domínio real:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z, \quad \tan(z + \pi) = \tan z, \quad \text{etc.}$$

5) tem a mesma paridade apresentada no domínio real:

$$\cos(-z) = \cos z \text{ (par)}, \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \text{ (ímpar)}, \quad \text{etc.}$$

6) têm apenas aqueles mesmos zeros que apresentam no domínio real:

$$\operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow z = k\pi, \quad \cos z = 0 \Rightarrow z = (2k + 1)\pi/2, \quad \text{etc.}$$

Todas essas proposições decorrem da definição, equação (1.17), e sua verificação é deixada como exercício.

1.13 As Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas de variável complexa são definidas de modo análogo às de variável real:

$$\boxed{\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}}, \quad \boxed{\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z \equiv \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z \equiv \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z \equiv \frac{1}{\sinh z}.$$

Deixa-se como exercício verificar:

1) que continuam válidas as relações ordinárias, incluindo as fórmulas de derivação:

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1 \\ \sinh(z_1 \pm z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1 \\ \cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \\ \cosh(-z) &= \cosh z \text{ (par)}, \quad \sinh(-z) = -\sinh z \text{ (ímpar)} \\ (\cosh z)' &= \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z, \quad (\operatorname{sech} z)' = -\operatorname{sech} z \tanh z, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

2) as seguintes relações entre o seno e o cosseno hiperbólicos e os trigonométricos:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sinh iz = i \operatorname{sen} z & \cosh iz = \cos z \\ \operatorname{sen} iz = i \sinh z & \cos iz = \cosh z \end{array}}$$

1.14 As Inversas das Funções Hiperbólicas e Trigonométricas

Sabemos que as inversas das funções hiperbólicas de variável real podem ser expressas em termos da função logarítmica real; exatamente as mesmas expressões se obtêm para as inversas das funções hiperbólicas de variável complexa em termos da função logarítmica complexa:

$$\operatorname{arcsen} z = \log(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{arccosh} z = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad \text{etc.}$$

Para as inversas das funções trigonométricas de variável complexa há a novidade de também podem ser expressas em termos da função logarítmica complexa:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen} z &= -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) & \operatorname{arccos} z &= -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \operatorname{arctan} z &= \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz} & \operatorname{arccot} z &= \frac{1}{2i} \log \frac{z+i}{z-i} \\ \operatorname{arcsec} z &= -i \log \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} & \operatorname{arccsc} z &= -i \log \frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \end{aligned}$$

Por dependerem da função logarítmica, multivalorada, todas essas funções inversas (de funções hiperbólicas ou trigonométricas) são também multivaloradas. A raiz quadrada que aparece em alguma delas, cujas duas determinações não ser consideradas, contribui adicionalmente para a multivaloração dessas funções. Para mostrar o método de se obterem as expressões dessas funções inversas, deduzimos abaixo a expressão da função $\arcsen z$:

$$\begin{aligned} \arcsen z = w &\Rightarrow z = \sen w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}} \Rightarrow (e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) = 1 \\ (e^{iw} - iz)^2 &= 1 - z^2 \Rightarrow e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow w = \arcsen z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \blacksquare \end{aligned}$$

As demais são obtidas por um procedimento análogo.

1.15 As Funções Potência $w = z^c$ e Exponencial $w = c^z$ Generalizadas

Tais funções de $z \in \mathbb{C}$ são definidas, em termos de um parâmetro $c \in \mathbb{C}$, pelas equações

$$z^c \equiv e^{c \log z} \quad \text{e} \quad c^z \equiv e^{z \log c},$$

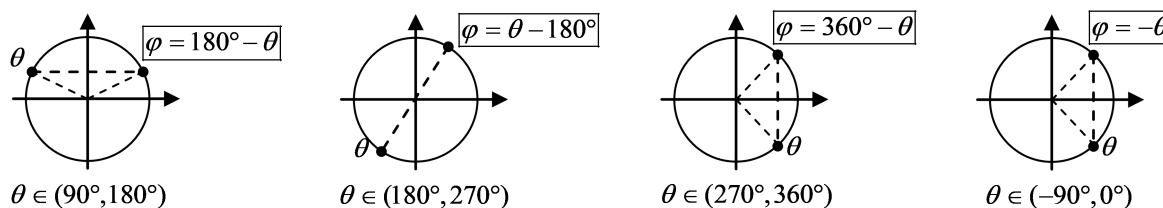
onde, para dois números complexos a e b , a operação b^a é assim definida:

- para $b \neq 0$: $b^a \equiv e^{a \log b}$.
- para $b = 0$ (base nula): $\begin{cases} 0^a \equiv 0 & \text{se } a \in \mathbb{R}_{>0} \\ 0^a \text{ é indefinido} & \text{se } a \notin \mathbb{R}_{>0} \end{cases}$

Note que $b^0 \equiv 1$ está bem definido, mas são indefinidos, por exemplo, 0^{-2} e 0^i .

1.16 Apêndice: Redução Ao Primeiro Quadrante

Seja f uma das funções \sen , \cos , \tan , \cot , \sec ou \csc . Considere os dois problemas seguintes, nos quais θ é um ângulo fora do 1º quadrante e se admitem conhecidos os valores de f no 1º quadrante: a) o de calcular $f(\theta)$ quando θ é dado, e b) o de calcular θ quando $f(\theta)$ e o quadrante de θ são dados. Resolvemo-los por meio da técnica de redução ao 1º quadrante, que consiste em usar o ângulo φ do 1º quad. tal que $f(\varphi) = |f(\theta)|$, donde $f(\theta) = \pm f(\varphi)$, nessa equação devendo ser o usado o sinal "+" ou "-" que a torne verdadeira, uma questão simples, pois o sinal de f é conhecido nos quatro quadrantes.



As figuras acima mostram, para cada ângulo θ , o ângulo φ do 1º quad. tal que $f(\varphi) = |f(\theta)|$. A seguir resumimos as fórmulas de redução de um ângulo θ (no 2º, 3º ou 4º quad.) a esse ângulo φ do 1º quad., as chamadas fórmulas de redução ao primeiro quadrante:

$$\begin{aligned} \varphi &= 180^\circ - \theta & \text{se } \theta \in 2^\circ \text{ quad.} &= (90^\circ, 180^\circ), \\ \varphi &= \theta - 180^\circ & \text{se } \theta \in 3^\circ \text{ quad.} &= (180^\circ, 270^\circ), \\ \varphi &= 360^\circ - \theta & \text{se } \theta \in 4^\circ \text{ quad.} &= (270^\circ, 360^\circ), \\ \varphi &= -\theta & \text{se } \theta \in 4^\circ \text{ quad.} &= (-90^\circ, 0^\circ), \end{aligned}$$

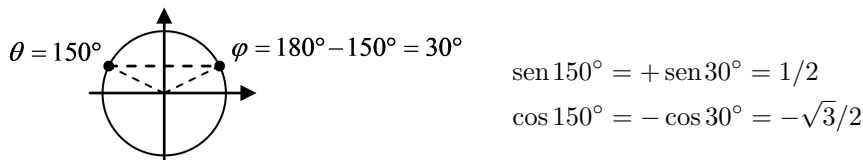
onde, para $\theta \in 4^\circ$ quad., consideramos tanto determinações positivas quanto negativas de θ , ambas usadas com frequência.

Acima, expressamos os ângulos em graus, mas nada impede escrevê-los em radianos. Além disso, quando se faz referência ao quadrante de um ângulo, raramente é necessário precisar os quadrantes dos ângulos limítrofes (0° , 90° , 180° e 270°), sendo essa a razão de especificá-los por intervalos abertos.

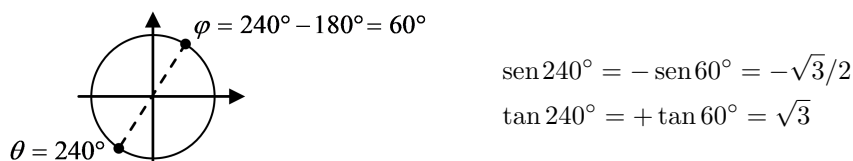
Seguem exemplos do uso da redução ao primeiro quadrante na resolução dos dois tipos de problemas supracitados, nos quais desenhamos figuras que ajudam a lembrar as fórmulas acima:

a) Exemplos de cálculo de funções trigonométrica de ângulos fora do 1º quadrante:

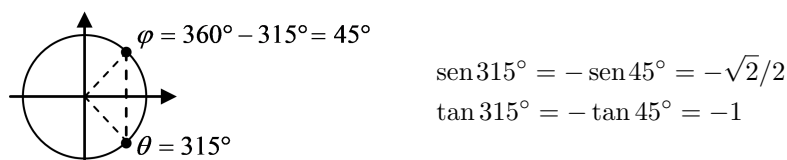
i) $\theta = 150^\circ \in 2^\circ$ quad., onde o seno é positivo, e o cosseno é negativo.



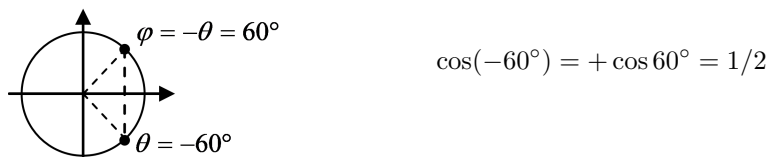
ii) $\theta = 240^\circ \in 3^\circ$ quad., onde o seno é negativo, e a tangente é positiva.



iii) $\theta = 315^\circ \in 4^\circ$ quad., onde o seno é negativo, e a tangente é negativa.

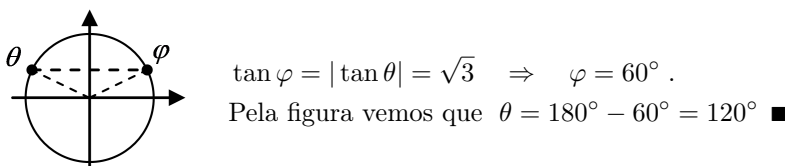


iv) $\theta = -60^\circ \in 4^\circ$ quad., onde o cosseno é positivo.

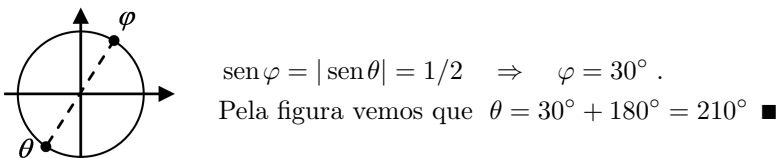


b) Exemplos de cálculo de θ sendo fornecidos o quadrante desse ângulo e o valor de uma função trigonométrica $f(\theta)$:

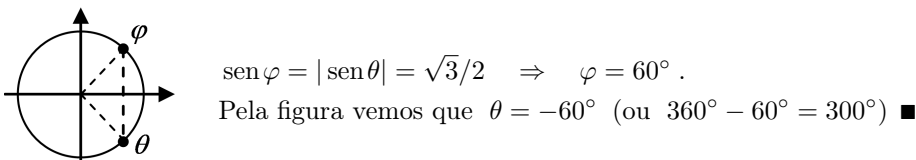
i) Cálculo de $\theta \in 2^\circ$ quad. tal que $\tan \theta = -\sqrt{3}$:



ii) Cálculo de $\theta \in 3^\circ$ quad. tal que $\sin \theta = -1/2$:



iii) Cálculo de $\theta \in 4^\circ$ quad. tal que $\sin \theta = -\sqrt{3}/2$:



1.17 Exercícios

1] Passe para a forma polar:

- | | | | |
|-------------|---------------|----------------------|-----------------------------|
| (a) $1 + i$ | (b) $-5 + 5i$ | (c) $-3 + i\sqrt{3}$ | (d) $\sqrt{3} - 3i$ |
| (e) $-3i$ | (f) -5 | (g) i | (h) $-i$ |
| (i) 1 | (j) -1 | (k) $2 + 2i$ | (l) $-\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ |

2] Reduza à forma $a + bi$:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i^{21} - i^{40}}$ | (b) $\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$ | (c) $\frac{(2 + i)(3 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - i)^2}$ |
| (d) $\frac{i^4 - i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$ | (e) $(2i - 1)^2 \left[\frac{4}{1 - i} + \frac{2 - i}{1 + i} \right]$ | (f) $3 \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 - 2 \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^3$ |
| (g) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} \right)^4 \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^5$ | (h) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^8$ | |

3] Se $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, e $z_3 = -(\sqrt{3} - i)/2$ calcule:

- | | | | |
|---------------------|---------------------------------|-----------------|--|
| (a) $ 3z_1 - 4z_2 $ | (b) $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$ | (c) $(z_3^*)^8$ | (d) $\left \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right $ |
|---------------------|---------------------------------|-----------------|--|

4] Encontre números reais x e y tais que:

- | |
|--|
| (a) $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ |
| (b) $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$ |

5] Se $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$ e $z_3 = \sqrt{3} - 2i$, calcule:

- | |
|---|
| (a) $\text{Im}(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2)$ |
| (b) $\text{Re}(z_1 z_2 / z_3)$ |

6] Identifique e desenhe o lugar geométrico do plano complexo dado por:

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| (a) $ 2z - 2 - 2i = 12$ | (b) $\text{Im } z^2 = 4$ | (c) $1 < z + i \leq 2$ | (d) $ (z - 3)/(z + 3) = 2$ |
| (e) $ z - 2 = 2 z + 2i $ | (f) $\text{Re}(1/z) < 1/4$ | (g) $\text{Re } z^2 > 0$ | (h) $\text{Re } z^2 > 1$ |
| (i) $\text{Re}[z^*(z + 2)] = 3$ | (j) $ \text{Arg}(z^3) < \pi/2$ | | |

7] Encontre a equação apresentando apenas a variável $z (= x + iy)$:

- | |
|--|
| (a) do círculo de raio 2 e centro em $(-3, 4)$ |
| (b) do círculo $4(x - 2)^2 + 4(y + 3)^2 = 36$ |

8] Determine a curva do plano de w que é imagem do quadrado de vértices em 0, 1, $1 + i$ e i do plano de z sob a transformação $w = z^2$.

9] Mostre que:

- | | | | |
|--|---|------------------------------|------------------------------|
| (a) $(e^z)^* = e^{(z^*)}$ | (b) $(\cos z)^* = \cos(z^*)$ | (c) $(\sin z)^* = \sin(z^*)$ | (d) $(\tan z)^* = \tan(z^*)$ |
| (e) $ \sin z ^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y = \cosh^2 y - \cos^2 x$ | (f) $ \cos z ^2 = (\cos 2x + \cosh 2y)/2$ | | |

10] Determine os zeros das seguintes funções:

- | | | | |
|--------------|--------------|---------------|---------------|
| (a) $\sin z$ | (b) $\cos z$ | (c) $\sinh z$ | (d) $\cosh z$ |
|--------------|--------------|---------------|---------------|

11] Calcule $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{17} - i}{z^{10} + 1}$.

12] Separe a parte real u e imaginária v das seguintes funções:

- | | | | | | | |
|------------------|-----------------------|---------------------------|----------------|--------------|---------------|---------------|
| (a) $2z^2 - 3iz$ | (b) $z + \frac{1}{z}$ | (c) $\frac{1 - z}{1 + z}$ | (d) \sqrt{z} | (e) $\sin z$ | (f) $\cosh z$ | (g) e^{3iz} |
|------------------|-----------------------|---------------------------|----------------|--------------|---------------|---------------|

13] Calcule:

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline \text{(a)} \sqrt[3]{1} & \text{(c)} \sqrt[3]{-8i} & \text{(e)} \sqrt[6]{-64} & \text{(g)} \sqrt{-8+6i} \\ \hline \text{(b)} \sqrt{2+i2\sqrt{3}} & \text{(d)} \sqrt[4]{-4} & \text{(f)} \sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}} & \hline \end{array}$$

14]

- (a) Calcule $\sqrt{15-8i}$
 (b) Fatore em monômios: $P(z) = (1-i)z^3 + (-5+i)z^2 + (6-4i)z$

15] Resolva:

$$\text{(a)} z^2 + (4+3i)z - 2 + 8i = 0 \quad \text{(b)} iz^2 - (1+2i)z + 1 + 3i = 0 \quad \text{(c)} z^4 + z^2 + 1 = 0$$

16] Calcule todas as raízes de cada uma das seguintes equações:

$$\text{(a)} \log^3 z = -\frac{i\pi^3}{8} \quad \text{(b)} \log \frac{2 \cot z}{3} = \frac{i\pi}{2} \quad \text{(c)} \log \cos z = \frac{\pi i}{2}$$

17] Calcule, na forma $a + bi$, as expressões abaixo. No caso de função multivalorada, forneça todas as determinações.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} 4 \sinh(\pi i/3) & \text{(b)} \coth(3\pi i/4) & \text{(c)} \sin[(\pi + i \ln 8)/3] & \text{(d)} \cosh\left[(2k+1)\frac{\pi i}{2}\right] (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{(e)} \sqrt{[1 - \cos(i \ln 5)]/0,1} & \text{(f)} \log(-1/2 - i\sqrt{3}/2) & \text{(g)} (-1)^\pi & \text{(h)} \operatorname{Im}[1^{\sqrt{2}}] \\ \text{(i)} |(-i)^i| & \text{(j)} (1+i)^i & \text{(k)} (1+i\sqrt{3})^{-i} & \end{array}$$

18] Identifique as curvas do plano complexo ao longo das quais as seguintes funções têm apenas valores reais:

$$\text{(a)} \operatorname{sen} z \quad \text{(b)} \sinh z .$$

RESPOSTAS COM ALGUMAS SOLUÇÕES

Na soluções que seguem, quando $2k\pi$ ou $k\pi$ compor um ângulo em radianos, está implícito que $k \in \mathbb{Z}$, a não ser que se diga explicitamente o contrário.

1

Passar para a forma polar:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} z = 1 + i = r \operatorname{cis} \theta \\ r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \quad \xrightarrow{\theta \in 1^\circ \text{ quad.}} \theta = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \blacksquare$$

$$\text{(b)} 5\sqrt{2} \operatorname{cis}(3\pi/4) \quad \text{(c)} 2\sqrt{3} \operatorname{cis}(5\pi/6) \quad \text{(d)} 2\sqrt{3} \operatorname{cis}(-\pi/3) \text{ [ou } 2\sqrt{3} \operatorname{cis}(5\pi/3)]$$

$$\text{(e)} 3 \operatorname{cis}(3\pi/2) \quad \text{(f)} 5 \operatorname{cis}(\pi) \quad \text{(g)} \operatorname{cis}(\pi/2) \quad \text{(h)} \operatorname{cis}(3\pi/2)$$

$$\text{(i)} \operatorname{cis} 0 \quad \text{(j)} \operatorname{cis} \pi \quad \text{(k)} 2\sqrt{2} \operatorname{cis}(\pi/4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(l)} z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2} = r \operatorname{cis} \theta \\ r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \xrightarrow{\theta \in 3^\circ \text{ quad.}} \theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \end{array} \right\} z = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} \blacksquare$$

2

Reduzir à forma $a+bi$:

$$\text{(a)} \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i^{21} - i^{40}} = \frac{3i^2 - i^3}{2i^1 - i^0} = \frac{3(-1) - (-i)}{2i - 1} = \frac{-3 + i}{2i - 1} \cdot \frac{-2i - 1}{-2i - 1} = \frac{3 + 2 + 6i - i}{2^2 + (-1)^2} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i \blacksquare$$

$$\text{(b)} 3 - i \quad \text{(c)} -15/2 + 5i$$

$$\text{(d)} 2 - i \quad \text{(e)} -(11 + 23i)/2 \quad \text{(f)} -3 - 2i$$

(g) Cálculo de $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \begin{cases} \left(\frac{e^{-i\pi/6}}{e^{i\pi/6}}\right)^4 = \left(e^{i(-\pi/6-\pi/6)}\right)^4 = \left(e^{-i\pi/3}\right)^4 = e^{-i4\pi/3} \quad (\text{modo 1}) \\ \text{ou} \\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right)^4 = \left(\frac{(\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})i + i^2}{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}\right)^4 = \left(\frac{3-2i\sqrt{3}-1}{4}\right)^4 = \left(\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}\right)^4 \\ = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(\frac{2e^{-i\pi/3}}{2}\right)^4 = e^{-i4\pi/3} \quad (\text{modo 2}) \end{cases}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^5 = \left(\frac{1+2i-1}{1+1}\right)^5 = \left(\frac{2i}{2}\right)^5 = i^5 = i.$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 &= e^{-i4\pi/3} i = i e^{-240^\circ} = i e^{-240^\circ+360^\circ} = i e^{120^\circ} = i [\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ)] \\ &= i \left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \blacksquare \end{aligned}$$

Note que a diferença entre os modos 1 e 2 acima é que, no modo 1, escrevemos o numerador e o denominador na forma exponencial antes de efetuar a divisão, enquanto, no modo 2, efetuamos a divisão antes de usarmos a forma exponencial.

(h) Cálculo de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8 &= \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right)^8 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^8 [e^{i(\pi/3-\pi/4)}]^8 = (\sqrt{2})^8 [e^{i\pi/12}]^8 = 16e^{i8\pi/12} = 16e^{i2\pi/3} \\ &= 16\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8i\sqrt{3} \blacksquare \end{aligned}$$

Note que o cálculo acima foi efetuado pelo modo 1 apresentado no item (g) acima. Pelo modo 2 haveria complicação; observe:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^8 = \dots = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^8,$$

onde, não tendo o complexo $(\sqrt{3}+1)/2 + i(\sqrt{3}-1)/2$ argumento notável, torna-se trabalhoso elevá-lo à oitava potência.

3

(a) $\sqrt{157}$ (b) $-7 + 3i$

(c) Cálculo de $(z_3^*)^8$, com $z_3 = -(\sqrt{3}-i)/2$:

$$z_3 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \Rightarrow (z_3^*)^8 = \left[\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^8 = \frac{(\sqrt{3}+i)^8}{2^8} = \frac{(2e^{i30^\circ})^8}{2^8} = \frac{\cancel{2^8}e^{i240^\circ}}{\cancel{2^8}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare$$

(d) 1

4

(a) $x = -1$ e $y = 2$

(b) Se $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$, então:

$$\begin{aligned} \underbrace{2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i}_{(2x-2y-5)+(-3y+4x-10)i} &= (x + y + 2) - (y - x + 3)i \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 5 &= x + y + 2 \\ -3y + 4x - 10 &= -y + x - 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -2 \end{cases} \blacksquare \end{aligned}$$

(a) Cálculo de $w = \text{Im}(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2)$, com $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$ e $z_3 = \sqrt{3} - 2i$:

$$z_1^3 = (1 - i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - \underbrace{i^3}_{-i} = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i.$$

$$z_2^2 = (-2 + 4i)^2 = 4 - 16i - 16 = -12 - 16i.$$

$$z_3^2 = (\sqrt{3} - 2i)^2 = 4 - 4\sqrt{3}i - 4 = -1 - 4i\sqrt{3}.$$

$$\therefore w = \text{Im}[2(-2 - 2i) + (-12 - 16i) - 5(-1 - 4i\sqrt{3})] = -4 - 48 + 20\sqrt{3} = -52 + 20\sqrt{3} \blacksquare$$

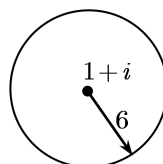
(b) $(2\sqrt{3} - 12)/7$

Passar para a forma polar:

(a) $|2z - 2 - 2i| = 12$:

$$|2z - 2 - 2i| = 12 \xrightarrow{\div 2} |z - (1 + i)| = 6$$

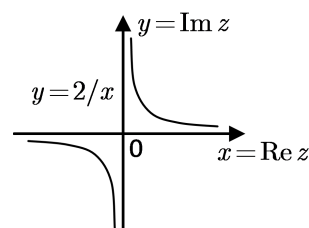
\therefore A circunferência de raio 6 centrada em $z = 1 + i$ ■



(b) $\text{Im } z^2 = 4$:

$$\text{Im } z^2 = 4 \Rightarrow \text{Im}(x + iy)^2 = \text{Im}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xy = 4$$

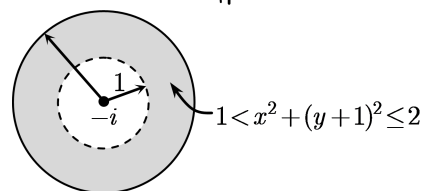
$\Rightarrow xy = 2$: A hipérbole mostrada à direita ■



(c) $1 < |z + i| \leq 2$:

$$1 < |z + i| \leq 2 \Rightarrow 1 < |z - (-i)| \leq 2$$

\therefore A região com a forma de uma arruela, centrada em $z = -i$, de raios 1 e 2, contendo a borda externa, mas não a interna ■



(d) $|(z - 3)/(z + 3)| = 2$:

$$\begin{aligned} |(z - 3)/(z + 3)| = 2 &\Rightarrow |z - 3| = 2|z + 3| \Rightarrow |z - 3|^2 = 4|z + 3|^2 \Rightarrow |x - 3 + iy|^2 = 4|x + 3 + iy|^2 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 &= 4[(x + 3)^2 + y^2] \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4[x^2 + 6x + 9 + y^2] \Rightarrow \underbrace{x^2 + 10x + 9 + y^2}_{(x+5)^2 - 25} = 0 \end{aligned}$$

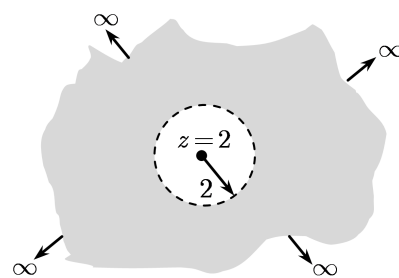
$\Rightarrow (x + 5)^2 + y^2 = 16$: circunferência de raio 4 centrada em $z = -5$ ■

(e) Circunferência de raio $\sqrt{32}/3$ e centro em $(-2 - 8i)/3$.

(f) $\text{Re}(1/z) < 1/4$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{4} &\Rightarrow \text{Re} \frac{1}{z} < \text{Re} \frac{1}{z} \frac{z^*}{z^*} = \text{Re} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} < \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 4x < x^2 + y^2 &\Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x}_{(x-2)^2 - 4} + y^2 > 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 > 4. \end{aligned}$$

\therefore O *exterior* da circunferência de raio 2 centrada em $z = 2$ ■



(g) A região entre as retas $y = \pm x$ contendo o eixo x .

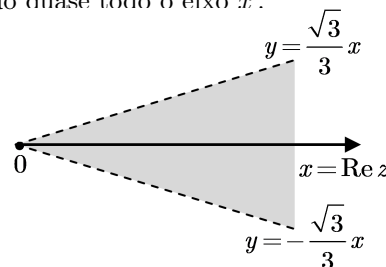
(h) A região limitada pelos ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ contendo quase todo o eixo x .

(i) A circunferência de raio 2 e centro em $z = -1$.

(j) $|\text{Arg}(z^3)| < \pi/2$:

$$|\text{Arg}(z^3)| < \frac{\pi}{2} \xrightarrow[|z| \equiv r]{\text{Arg } z \equiv \theta} |\text{Arg}(r e^{i\theta})^3| = |\text{Arg}(r^3 e^{3i\theta})| = |3\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$: a região aberta entre as semirretas $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ $\Big|_{x>0}$ ■



(a) Círculo de raio 2 e centro em $(-3, 4) \rightarrow |z - (-3 + 4i)| = 2$ ■

(b) Círculo $4(x - 2)^2 + 4(y + 3)^2 = 36 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9 \rightarrow |z - (2 - 3i)| = 3$ ■
Trata-se da circunferência de raio 3 centrada em $z = 2 - 3i$.

É a curva do plano $w = u + iv$ formada pelo segmento de reta desde $w = -1$ até 1 e pelos arcos de parábola $u = 1 - v^2/4$ e $u = -1 + v^2/4$ entre $2i$ e -1 .

(e) **Mostrar que** $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = -\cos^2 x + \cosh^2 y$.

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z|^2 &= |\operatorname{sen}(x + iy)|^2 = |\operatorname{sen} x \cos iy + \operatorname{sen} iy \cos x|^2 = |\operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x|^2 \\ &= (\operatorname{sen} x \cosh y)^2 + (\operatorname{senh} y \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \operatorname{senh}^2 y \cos^2 x \\ &= \operatorname{sen}^2 x (1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y (1 - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cancel{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y} + \operatorname{senh}^2 y - \cancel{\operatorname{senh}^2 y \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \blacksquare \\ 1 - \cos^2 x + \cosh^2 y - 1 = -\cos^2 x + \cosh^2 y \blacksquare \end{cases} \end{aligned}$$

Determinar zeros de funções:

(a) $\operatorname{sen} z$:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \xrightarrow{\cdot e^{iz}} e^{2iz} = 1 \Rightarrow 2iz = \log 1 = \underbrace{\ln 1}_0 + i2k\pi \Rightarrow z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \blacksquare$$

(b) $(2k + 1)\pi/2$

(c) $k\pi i$

(d) $\cosh z$:

$$\begin{aligned} \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 &\xrightarrow{\cdot e^z} e^{2z} = -1 \\ \Rightarrow 2z = \log(-1) &= \underbrace{\ln(-1)}_0 + i(\pi + 2k\pi) \Rightarrow z = (2k\pi + 1)\frac{\pi}{2}i \quad (k \in \mathbb{Z}) \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{17} - i}{z^{10} + 1} &= \frac{i^{17} - i}{i^{10} + 1} = \frac{i^1 - i}{z^2 + 1} = \frac{i - i}{-1 + 1} = \frac{0}{0} : \text{forma indeterminada.} \\ \therefore \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{17} - i}{z^{10} + 1} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{17z^{16}}{10z^9} = \frac{17i^{16}}{10i^9} = \frac{17i^7}{10} = \frac{17i^3}{10} = -\frac{17i}{10} \blacksquare \end{aligned}$$

Separar as partes real u e imaginária v de funções:

(a) $2z^2 - 3iz = 2(x + iy)^2 - 3i(x + iy) = 2(x^2 - y^2 + 2xyi) - 3ix + 3y = \underbrace{2x^2 - 2y^2 + 3y}_u + \underbrace{(4xy - 3x)i}_v \blacksquare$

(b) $z + \frac{1}{z} = z + \frac{z^*}{zz^*} = z + \frac{z^*}{|z|^2} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}_u + \underbrace{y - \frac{y}{x^2 + y^2}}_v i \blacksquare$

(c) $\frac{1 - z}{1 + z} = \frac{1 - x - iy}{1 + x + iy} = \frac{1 - x - iy}{1 + x + iy} \cdot \frac{1 - x - iy}{1 - x - iy}$
 $= \frac{1 - x^2 - y^2 + (1 - x)iy - iy(1 + x)}{(1 + x)^2 + y^2} = \underbrace{\frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}}_u + \underbrace{\frac{-2y}{(1 + x)^2 + y^2}}_v i \blacksquare$

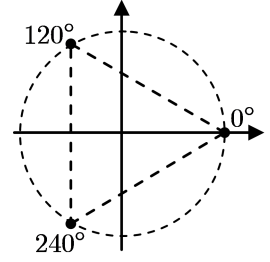
(d) $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} = \sqrt{r} [\operatorname{sen}(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)] = \underbrace{\sqrt{r} \cos(\theta/2)}_u + \underbrace{\sqrt{r} \operatorname{sen}(\theta/2)}_v i \blacksquare$

(e) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \operatorname{sen} iy \cos x = \underbrace{\operatorname{sen} x \cosh y}_u + \underbrace{i \cos x \operatorname{senh} y}_v \blacksquare$

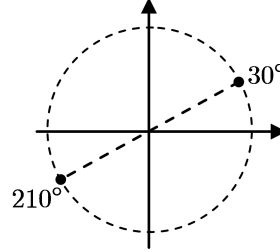
(f) $\cosh z = \cosh(x + iy) = \cosh x \cosh iy + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} iy = \underbrace{\cosh x \cos y}_u + \underbrace{i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y}_v \blacksquare$

(g) $e^{3iz} = e^{3i(x + iy)} = e^{-3y} e^{i3x} = e^{-3y} (\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x) = \underbrace{e^{-3y} \cos 3x}_u + \underbrace{i e^{-3y} \operatorname{sen} 3x}_v \blacksquare$

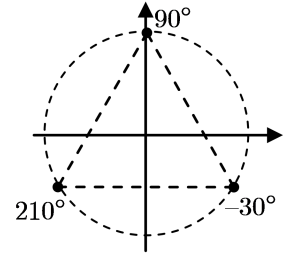
$$(a) \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{i(0^\circ+360^\circ k)}} = e^{i120^\circ k} = \begin{cases} k=0 \\ = e^{i0^\circ} = 1 \blacksquare \\ k=1 \\ = e^{i120^\circ} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare \\ k=2 \\ = e^{i240^\circ} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare \end{cases}$$



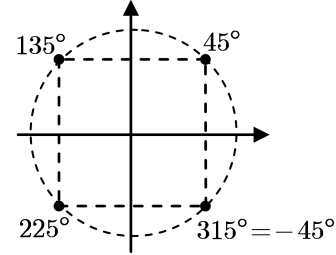
$$(b) \sqrt{2+i2\sqrt{3}} = \sqrt{4e^{i(60^\circ+360^\circ k)}} = 2e^{i(30^\circ+180^\circ k)} \\ = \begin{cases} k=0 \\ = e^{i30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ k=1 \\ = e^{i210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \end{cases} = \pm(\sqrt{3}+i) \blacksquare$$



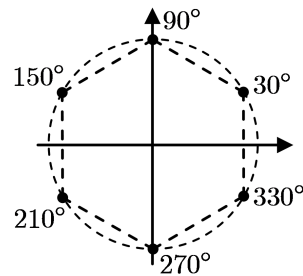
$$(c) \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8e^{i(-90^\circ+360^\circ k)}} = 2e^{i(-30^\circ+120^\circ k)} \\ = \begin{cases} k=0 \\ = e^{-i30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}-i \blacksquare \\ k=1 \\ = 2e^{i90^\circ} = 2i \blacksquare \\ k=2 \\ = e^{i210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}-i \blacksquare \end{cases}$$



$$(d) \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4e^{i(180^\circ+360^\circ k)}} = \sqrt{2}e^{i(45^\circ+90^\circ k)} \\ = \begin{cases} k=0 \\ = \sqrt{2}e^{i45^\circ} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1+i \blacksquare \\ k=1 \\ = \sqrt{2}e^{i135^\circ} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -1+i \blacksquare \\ k=2 \\ = \sqrt{2}e^{i225^\circ} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -1-i \blacksquare \\ k=3 \\ = \sqrt{2}e^{i315^\circ} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1-i \blacksquare \end{cases}$$

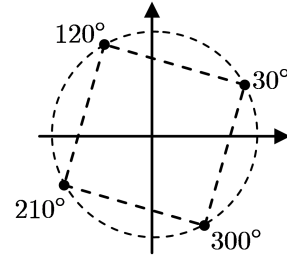


$$(e) \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64e^{i(180^\circ+360^\circ k)}} = 2e^{i(30^\circ+60^\circ k)} \\ = \begin{cases} k=0 \\ = \sqrt{2}e^{i30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}+i \blacksquare \\ k=1 \\ = 2e^{i90^\circ} = 2i \blacksquare \\ k=2 \\ = 2e^{i150^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}+i \blacksquare \\ k=3 \\ = 2e^{i210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}-i \blacksquare \\ k=4 \\ = 2e^{i270^\circ} = -2i \blacksquare \\ k=5 \\ = \sqrt{2}e^{i330^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}-i \blacksquare \end{cases}$$



$$(f) \sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16 e^{i(120^\circ + 360^\circ k)}} = 2 e^{i(30^\circ + 60^\circ k)}$$

$$= \begin{cases} k=0 \\ = \sqrt{2} e^{i30^\circ} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} + i \blacksquare \\ k=1 \\ = 2 e^{i120^\circ} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3} \blacksquare \\ k=2 \\ = 2 e^{i210^\circ} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = -\sqrt{3} - i \blacksquare \\ k=3 \\ = 2 e^{i300^\circ} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3} \blacksquare \end{cases}$$



$$(g) \sqrt{-8 + 6i} = x + iy \Rightarrow -8 + 6i = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \\ x^2 - y^2 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8 \Rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 6 \Rightarrow x^2 = -9 \text{ (não serve, pois } x \notin \mathbb{R}) \\ \text{ou} \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \frac{3}{\pm 1} = \pm 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-8 + 6i} = \pm 1 + i(\pm 3) = \pm(1 + 3i) \blacksquare$$

14

(a) Cálculo de $15 - 8i$

$$\sqrt{15 - 8i} \equiv x + iy \Rightarrow 15 - 8i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = -8 \Rightarrow y = -4/x \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases} \Rightarrow x^2 - (-4/x)^2 = 15 \Rightarrow x^4 - 15x^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (não serve, pois } x \in \mathbb{R}) \\ \text{ou} \\ x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow y = -4/(\pm 4) = -(\pm 1) \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{15 - 8i} = \pm 4 - i(\pm 1) = \pm(4 - i) \blacksquare$$

$$\text{Comprovação: } [\pm(4 - i)]^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i.$$

(b) Esboço da solução:

$$P(z) = (1 - i)z^3 + (-5 + i)z^2 + 6 - 4i = (1 - i)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

Uma raiz óbvia desse polinômio é $z_1 = 0$.

As outras duas são as raízes de $(1 - i)z^2 + (-5 + i)z + 6 - 4i = 0$, dadas por $z_2 = 2 + 3i$ e $z_3 = 1 - i$ (calculem-nas!).

Logo,

$$P(z) = (1 - i)[z - 0][z - (2 + 3i)][z - (1 - i)] = (1 - i)z(z - 2 - 3i)(z - 1 + i) \blacksquare$$

15

(a) Cálculo das raízes de $z^2 + (4 + 3i)z - 2 + 8i = 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \sqrt{(4 + 3i)^2 - 4(1)(-2 + 8i)} = \sqrt{(16 + 24i - 9) + 8 - 32i} \\ &= \sqrt{15 - 8i} = \pm(4 - i) : \text{ calculado no prob. 14(a)}. \end{aligned}$$

$$\therefore z = \frac{-(4 + 3i) + \sqrt{\Delta}}{2(1)} = \frac{-(4 + 3i) \pm (4 - i)}{2} = \begin{cases} \frac{-(4 + 3i) + (4 - i)}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i \blacksquare \\ \text{ou} \\ \frac{-(4 + 3i) - (4 - i)}{2} = \frac{-8 - 2i}{2} = -4 - i \blacksquare \end{cases}$$

(b) Cálculo das raízes de $iz^2 - (1 + 2i)z + 1 + 3i = 0$:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1 + 2i)^2 - 4i(1 + 3i)} = \sqrt{(1 + 4i - 4) - 4i + 12} = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

$$\therefore z = \frac{1 + 2i + \sqrt{\Delta}}{2i} = \frac{1 + 2i \pm 3}{2i} = \begin{cases} \frac{4 + 2i}{2i} = 1 - 2i \equiv z_1 \blacksquare \\ \text{ou} \\ \frac{-2 + 2i}{2i} = 1 + i \equiv z_2 \blacksquare \end{cases}$$

Observe a validade das fórmulas $z_1 + z_2 = -b/a$ (soma das raízes) e $z_1 z_2 = c/a$ (produto das raízes), onde, no caso, $a = i$, $b = -(1 + 2i)$ e $c = 1 + 3i$:

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (1 + i) = 2 - i \\ -b/a = (1 + 2i)/i = -i + 2 \end{array} \right\} \text{iguais, e } \left. \begin{array}{l} (1 - 2i)(1 + i) = 1 + 2 + i - 2i = 3 - i \\ c/a = (1 + 3i)/i = -i + 3 \end{array} \right\} \text{iguais.}$$

(c) $\pm(1 + i\sqrt{3})/2$ e $\pm(1 - i\sqrt{3})/2$

16

(a) Solução da equação $\log^3 z = -i\pi^3/8$:

$$\log z = \frac{\pi}{2} \sqrt[3]{-i} = \frac{\pi}{2} \sqrt[3]{e^{i(270^\circ + 360^\circ k)}} = \frac{\pi}{2} e^{i(90^\circ + 120^\circ k)} = \frac{\pi}{2} \begin{cases} e^{i(90^\circ)} = i \\ e^{i(210^\circ)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ e^{i(330^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi i}{2} \\ -\frac{\pi\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi i}{4} \\ \frac{\pi\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi i}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} e^{\pi i/2} = i \blacksquare \\ e^{-\pi\sqrt{3}/4} e^{-\pi i/4} = e^{-\pi\sqrt{3}/4} \sqrt{2}(1 - i)/2 \blacksquare \\ e^{\pi\sqrt{3}/4} e^{-\pi i/4} = e^{\pi\sqrt{3}/4} \sqrt{2}(1 - i)/2 \blacksquare \end{cases}$$

(b) Solução da equação $\log \frac{2 \cot z}{3} = \frac{i\pi}{2}$:

$$\log \frac{2 \cot z}{3} = \frac{i\pi}{2} \Rightarrow \frac{2 \cot z}{3} = e^{i\pi/2} = i \Rightarrow \cot z = \frac{3i}{2}.$$

$$\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})/2}{(e^{iz} - e^{-iz})/2i} \cdot \frac{e^{iz}}{e^{iz}} = i \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{3i}{2} \Rightarrow 2e^{2iz} + 2 = 3e^{2iz} - 3.$$

$$e^{2iz} = 5 \Rightarrow 2iz = \log 5 = \ln 5 + i2k\pi \Rightarrow z = k\pi - i \ln \sqrt{5} \quad (k \in \mathbb{Z}) \blacksquare$$

(c) Solução da equação $\log \cos z = i\pi/2$:

$$\cos z = i \rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2i \xrightarrow{\cdot e^{iz}} (e^{iz})^2 - 2i(e^{iz}) + 1 = 0.$$

$$e^{iz} = \frac{2i + \sqrt{-4 - 4}}{2} = \frac{2i \pm 2i\sqrt{2}}{2} = i(1 \pm \sqrt{2}).$$

$$iz = \log[i(1 \pm \sqrt{2})] = \ln|i(1 \pm \sqrt{2})| + i \arg[i(1 \pm \sqrt{2})] = \ln(\sqrt{2} \pm 1) + i(\pm\pi/2 + 2k\pi).$$

$$z = -i \ln(\sqrt{2} \pm 1) \pm \pi/2 + 2k\pi = \ln(\sqrt{2} + 1) + i(2k\pi + \pi/2) \text{ ou } \ln(\sqrt{2} - 1) + i(2k\pi - \pi/2) \blacksquare$$

17

(a) $\boxed{4 \sinh \frac{\pi i}{3}} = 4i \sin \frac{\pi i}{3} = 4i \frac{\sqrt{3}}{2} = 2i\sqrt{3} \blacksquare$

(b) $\boxed{\coth \frac{3\pi i}{4}} = \frac{\cosh \frac{3\pi i}{4}}{\sinh \frac{3\pi i}{4}} = \frac{\cos \frac{3\pi i}{4}}{i \sin \frac{3\pi i}{4}} = \frac{-\sqrt{2}/2}{i \sqrt{2}/2} = i \blacksquare$

(c) $\boxed{\operatorname{sen} \frac{\pi + i \ln 8}{3}} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{i \ln 8}{3} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{i \ln 8}{3} + \operatorname{sen} \frac{i \ln 8}{3} \cos \frac{\pi}{3}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh \frac{\ln 8}{3} + \left(i \sinh \frac{\ln 8}{3} \right) \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh \ln 8^{1/3} + \frac{i}{2} \sinh \ln 8^{1/3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 + 1/2}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{2 - 1/2}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5/2}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{3/2}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 3i}{8} \blacksquare$$

$$(d) \quad \boxed{\cosh\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}i\right]} = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0 \quad \blacksquare$$

$$(e) \quad \boxed{\sqrt{\frac{1 - \cos(i \ln 5)}{0,1}}} = \sqrt{\frac{1 - \cosh(\ln 5)}{0,1}} = \sqrt{\frac{1 - (e^{\ln 5} + e^{-\ln 5})/2}{0,1}} = \sqrt{\frac{1 - (5 + 1/5)/2}{0,1}} \\ = \sqrt{\frac{1 - (26/5)/2}{0,1}} = \sqrt{\frac{1 - (13/5)}{0,1}} = \sqrt{\frac{-8/5}{0,1}} = \sqrt{-16} = \pm 4i \quad \blacksquare$$

$$(f) \quad \boxed{\log\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \underbrace{\ln\left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}_{\ln 1 = 0} + i \arg\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad \blacksquare$$

$$(g) \quad \boxed{(-1)^\pi} = [e^{\log(-1)}]^\pi = [e^{\ln|-1| + i \arg(-1)}]^\pi = [e^{0+i(\pi+2k\pi)}]^\pi = [e^{i(2k+1)\pi}]^\pi \\ = e^{i(2k+1)\pi^2} = \cos[(2k+1)\pi^2] + i \sin[(2k+1)\pi^2] \quad \blacksquare$$

$$(h) \quad \boxed{\operatorname{Im}[1^{\sqrt{2}}]} = \operatorname{Im}[e^{\sqrt{2} \log 1}] = \operatorname{Im}[e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i \arg 1)}] = \operatorname{Im}[e^{\sqrt{2}(0+i2k\pi)}] = \operatorname{Im}[e^{i2k\pi\sqrt{2}}] \\ = \operatorname{Im}[\cos(2k\pi\sqrt{2}) + i \sin(2k\pi\sqrt{2})] = \sin(2k\pi\sqrt{2}) \quad \blacksquare$$

$$(i) \quad \boxed{|(-i)|^i} = |e^{i \log(-i)}| = |e^{i[\ln|-i| + i \arg(-i)]}| = |e^{i[\ln 1 + i(3\pi/2 + 2k\pi)]}| = |e^{i[0 + i(3\pi/2 + 2k\pi)]}| \\ = |e^{-(3\pi/2 + 2k\pi)}| = e^{-(3\pi/2 + 2k\pi)} \quad \blacksquare$$

$$(j) \quad \boxed{(1+i)^i} = e^{i \log(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i \arg(1+i)]} = e^{i[\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi)]} = e^{i \ln\sqrt{2} - (\pi/4 + 2k\pi)} \\ = e^{-(\pi/4 + 2k\pi)} e^{i \ln\sqrt{2}} = e^{-\pi/4 - 2k\pi} (\cos \ln\sqrt{2} + i \sin \ln\sqrt{2}) \quad \blacksquare$$

$$(k) \quad \boxed{(1+i\sqrt{3})^{-i}} = e^{-i \log(1+i\sqrt{3})} = e^{-i[\ln|1+i\sqrt{3}| + i \arg(1+i\sqrt{3})]} = e^{-i[\ln\sqrt{1+3} + i(\pi/3 + 2k\pi)]} \\ = e^{-i \ln 2 + (\pi/3 + 2k\pi)} = e^{\pi/3 + 2k\pi} e^{-i \ln 2} = e^{\pi/3 + 2k\pi} (\cos \ln 2 - i \sin \ln 2) \quad \blacksquare$$

18

(a) $\operatorname{sen} z$:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \operatorname{sen} iy \cos x = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x .$$

$$\operatorname{Im}(\operatorname{sen} z) = \operatorname{senh} y \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{senh} y = 0 & \Rightarrow y = k\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = 0 & \Rightarrow x = (2k+1)\pi/2 . \end{cases}$$

Assim, o seno é real ao longo do eixo real e das retas verticais $x = (2k+1)\pi/2$ ■

(b) $\operatorname{senh} z$:

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cosh iy + \operatorname{senh} iy \cosh x = \operatorname{senh} x \cos y + i \operatorname{sen} y \cosh x .$$

$$\operatorname{Im}(\operatorname{senh} z) = \operatorname{sen} y \underbrace{\cosh x}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k\pi .$$

Assim, o seno hiperbólico é real ao longo das seguintes retas horizontais:

$$y = 0, \quad y = \pm\pi, \quad y = \pm 2\pi, \quad y = \pm 3\pi \quad \dots \quad \blacksquare$$

Capítulo 2

Séries de Funções Ortogonais

- Ref. [4], seq. 5.7 e 5.8
- Ref. [8], seq. 11.1 a 11.4
- Ref. [6], cap. 2 (Séries Duplas de Fourier: p. 34 e 52) e cap. 3

2.1 Ortogonalidade de Funções e Expansão em Funções Ortogonais

2.1.1 Produto Escalar

A definição de espaço vetorial envolve um conjunto não vazio de elementos denominados vetores e um corpo de números chamados escalares. Para nossos propósitos, basta restringir esse corpo ao dos números reais, caso em que usamos a denominação espaço vetorial real, ou ao dos números complexos, que é o caso do chamado espaço vetorial complexo. Um espaço vetorial real ou complexo é dito euclidiano ou unitário, respectivamente, se for dotado de um produto escalar, cuja definição é a seguinte:

Denominamos produto escalar dos vetores u e v – aqui denotado por $\langle u, v \rangle$ – o escalar produzido por qualquer operação entre eles que satisfaça as quatro propriedades abaixo, sendo u e v qualquer par de vetores do espaço considerado:

PE1) Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$ (nota: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ se o espaço for real)

PE2) Linearidade em relação ao 2º fator: $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$

PE-3) Quadrado escalar não negativo: $\langle u, u \rangle \geq 0$

PE-4) Quadrado escalar nulo apenas no caso do vetor nulo: $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

onde α e β são escalares (neste capítulo, numa expressão matemática, escalares são denotados pelas letras gregas α e β , e vetores de espaços vetoriais genéricos, pelas letras latinas u , v e w), e empregamos o símbolo 0 para denotar tanto o número zero quanto o vetor nulo, o que nunca é passível de confusão.

Note que a desigualdade na propriedade PE-3 só faz sentido se o escalar $\langle u, u \rangle$ for real, o que de fato ocorre em vista da propriedade PE-1.

Das propriedades PE-1 e PE-2 deduz-se que

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \langle w, \alpha u + \beta v \rangle^* = (\alpha \langle w, u \rangle + \beta \langle w, v \rangle)^* = \alpha^* \langle w, u \rangle^* + \beta^* \langle w, v \rangle^* \quad (2.1)$$

$$= \alpha^* \langle u, w \rangle + \beta^* \langle v, w \rangle. \quad (2.2)$$

Por meio do produto escalar podemos dotar o espaço vetorial com o conceito de ortogonalidade do mesmo modo que o expressamos no \mathbb{R}^3 : dizemos que dois vetores u e v diferentes do vetor nulo são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$ (essa expressão é consistente com o fato de que, se $\langle u, v \rangle = 0$, então $\langle v, u \rangle = 0$, mesmo quando $\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$).

Das propriedades do produto escalar também se deduz a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a qual, para dois vetores u e v quaisquer, é dada por

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (\text{valendo a igualdade se e só se } u \text{ e } v \text{ forem linearmente dependentes}). \quad (2.3)$$

Provemos essa desigualdade:

De imediato vê-se que ela é satisfeita quando $u = 0$ ou $v = 0$, pois $\langle 0, v \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0^{(\dagger)}$. Passemos então a admitir que nenhum dos vetores u e v na desigualdade de Cauchy-Schwarz seja o vetor nulo. Nesse caso, podemos definir o seguinte

^(†)Para qualquer v tem-se que $\langle v, 0 \rangle = \langle v, 0 \cdot 0 \rangle = 0 \langle v, 0 \rangle = 0$.

vetor, cujo quadrado escalar é igual a 1:

$$\hat{u} \equiv \frac{u}{\sqrt{\langle u, u \rangle}} \Rightarrow \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = \left\langle \frac{u}{\sqrt{\langle u, u \rangle}}, \frac{u}{\sqrt{\langle u, u \rangle}} \right\rangle = \frac{\langle u, u \rangle}{(\sqrt{\langle u, u \rangle})^2} = 1.$$

Considere agora a seguinte decomposição de v em dois componentes, um *paralelo*, v_{\parallel} , e outro, v_{\perp} , *perpendicular* ao vetor u :

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}, \quad \text{onde} \quad v_{\parallel} \equiv \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u} \quad \text{e} \quad v_{\perp} \equiv v - v_{\parallel}.$$

A justificativa das qualificações "paralelo" e "perpendicular" decorre do fato de que, no espaço vetorial \mathbb{R}^3 , usando a definição de produto escalar que é ordinariamente empregada, a decomposição acima realmente produz o componente v_{\parallel} e o v_{\perp} , respectivamente paralelo e perpendicular a v . Além disso, em qualquer espaço vetorial, essa decomposição produz componentes v_{\parallel} e o v_{\perp} que são de fato ortogonais:

$$\begin{aligned} \langle v_{\parallel}, v_{\perp} \rangle &= \langle \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u}, v - \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u} \rangle = \langle \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u}, v \rangle - \langle \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u}, \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u} \rangle \\ &= \langle \hat{u}, v \rangle^* \langle \hat{u}, v \rangle - \langle \hat{u}, v \rangle^* \langle \hat{u}, v \rangle \underbrace{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle}_1 = 0. \end{aligned}$$

Pois bem, desenvolvendo o produto escalar $\langle v, v \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle v_{\parallel} + v_{\perp}, v_{\parallel} + v_{\perp} \rangle = \langle v_{\parallel}, v_{\parallel} \rangle + \underbrace{\langle v_{\parallel}, v_{\perp} \rangle}_0 + \underbrace{\langle v_{\perp}, v_{\parallel} \rangle}_0 + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle \\ &= \langle \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u}, \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u} \rangle + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle = \langle \hat{u}, v \rangle^* \langle \hat{u}, v \rangle \underbrace{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle}_1 + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle = |\langle \hat{u}, v \rangle|^2 + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle \\ &= \left| \left\langle \frac{u}{\sqrt{\langle u, u \rangle}}, v \right\rangle \right|^2 + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{\langle u, u \rangle}} \langle u, v \rangle \right|^2 + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle = \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle u, u \rangle} + \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\langle v, v \rangle - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle u, u \rangle} = \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - |\langle u, v \rangle|^2 \geq 0 \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Nela, a igualdade ocorre quando $\langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle = 0$, donde, pela propriedade PE-4, $v_{\perp} = v - v_{\parallel} = 0$, isto é, $v - \alpha u = 0$ (onde $\alpha = \langle \hat{u}, v \rangle = \langle u, v \rangle / \langle u, u \rangle$), ou seja, quando u e v forem linearmente dependentes. Reciprocamente, se u e v forem linearmente dependentes, então $v = \beta u$, donde

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| &= |\langle u, \beta u \rangle| = |\beta| |\langle u, u \rangle| = \sqrt{|\beta|^2 \langle u, u \rangle^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\beta^* \beta \langle u, u \rangle} \\ &= \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle \beta u, \beta u \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}, \end{aligned}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que agora se encontra provada.

Neste estudo do produto escalar convém trazer à baila o conceito de norma de um vetor, que é qualquer função que associa todo vetor u do espaço vetorial considerado a um número real $\|u\|$ que satisfaz as propriedades definidoras desse conceito, que são as seguintes:

N-1) $\|u\| \geq 0$

N-2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

N-3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular)

N-4) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (o único vetor de norma nula é o vetor nulo)

onde α é um escalar qualquer, e u e v são dois vetores quaisquer. A norma permite definir a distância entre duas grandezas vetoriais u e v pela expressão $\|u - v\|$ (a qual, no \mathbb{R}^3 , reproduz o conceito familiar da distância entre os dois pontos representados por u e v). Assim, $\|u\|$ também pode se denominar o comprimento ou a magnitude do vetor u (no \mathbb{R}^3 , trata-se da distância entre a origem e o ponto designado por u). Se a magnitude $\|u\|$ for igual a 1, o vetor u é dito unitário. Note que se $v \neq 0$ então $v/\|v\|$ é um vetor unitário, uma vez que $\|v/\|v\|\| = \|v\|/\|v\| = 1$.

Pois bem, o produto escalar também permite dotar o espaço vetorial com a norma

$$\|u\| \equiv \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (2.4)$$

Note então que

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle, \quad (2.5)$$

onde, à esquerda temos a norma quadrática e à direita o quadrado escalar do vetor u .

Vejamos se a expressão no membro direito dessa equação realmente satisfaz as propriedades da norma. N-1 é uma consequência direta de (2.4). N-4 decorre diretamente da PE-4. Já N-2 e N-3 são assim verificadas:

$$\text{N-2 : } \|\alpha u\| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u \rangle} = \sqrt{\alpha^* \alpha \langle u, u \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle u, u \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\alpha| \|u\| \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{N-3 : } \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \stackrel{(\dagger)}{\leq} \|u\|^2 + 2 |\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\stackrel{(\P)}{\leq} \|u\|^2 + 2 \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ \Rightarrow \|u+v\| &\leq \|u\| + \|v\| \quad \checkmark \end{aligned}$$

onde, na passagem (\dagger) , usamos a desigualdade $\operatorname{Re} z \leq |z|$, válida para todo número complexo z (a prop. (ii) na seção 1.3), e, na passagem (\P) , usamos (2.3), a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que agora pode ser reescrita em termos das normas de u e v :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{valendo a igualdade se e só se } u \text{ e } v \text{ forem linearmente dependentes}). \quad (2.6)$$

Num espaço vetorial com produto escalar, a norma é sempre aquela em (2.4), que tem a importante propriedade

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \quad (2.7)$$

análoga ao teorema de Pitágoras, que é assim provada:

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle}_0 + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \checkmark$$

Um conjunto de vetores não nulos é dito ortogonal se todo par de vetores desse conjunto for ortogonal, e um conjunto ortogonal de vetores é dito ortonormal se todo vetor desse conjunto for unitário. A definição do chamado

$$\text{delta de Kronecker : } \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

permite expressar a ortogonalidade e a ortonormalidade de um conjunto de vetores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ como segue:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij} \|v_j\|^2 & \text{se } B \text{ for ortogonal} \\ \delta_{ij} & \text{se } B \text{ for ortonormal.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Usemos essa relação de ortogonalidade para provar que tal conjunto B é necessariamente linearmente independente:

$$\sum_{j=1}^n c_j v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ij} \|v_j\|^2 = c_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \quad \checkmark$$

Vejamos alguns exemplos de produto escalar, que varia conforme o espaço vetorial.

O produto escalar de duas ênuplas $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ é comumente definido por

$$\langle u, v \rangle \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \beta_i \quad \text{no } \mathbb{C}^n \quad \text{ou} \quad \langle u, v \rangle \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad \text{no } \mathbb{R}^n.$$

É fácil mostrar que as propriedades PE-1 e PE-4 são satisfeitas (exercício).

Seja $F[\mu, \nu]$ o espaço vetorial complexo formado por todas as funções complexas de uma variável real definidas no intervalo $[\mu, \nu]$, podendo $\mu \rightarrow -\infty$ e/ou $\nu \rightarrow \infty$. O produto escalar de duas funções f e g desse espaço é definido por

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{\mu}^{\nu} f^*(x) g(x) w(x) dx, \quad (2.10)$$

onde $w(x)$ é uma função contínua e positiva em $[\mu, \nu]$ chamada de função peso. Por exemplo, as funções $\sin(m\pi x/\ell)$ e $\cos(m\pi x/\ell)$, com m e n inteiros, são inteiros, são ortogonais no intervalo $[-\ell, \ell]$, porque é nulo o produto escalar

$$\left\langle \sin \frac{m\pi x}{\ell}, \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0. \quad (2.11)$$

2.1.2 Operadores Lineares

Num certo espaço vetorial V , uma transformação linear L de V sobre si mesmo, isto é, $L : V \rightarrow V$, é denominada operador linear; observe dois exemplos:

$$1) \quad L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \mapsto v = Lu = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad L : F[\mu, \nu] \longrightarrow F[\mu, \nu] \\ f(x) \mapsto g(x) = Lf(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} + \int_{\mu}^x f(x) dx .$$

Seguem a nomenclatura e a definição de alguns operadores importantes:

- Nulo, denotado por 0 : $0u = 0 \forall u$
- Identidade, denotado por I : $Iu = u \forall u$
- Inverso de L , denotado por L^{-1} : $L^{-1}(Lu) = L(L^{-1}u) = u \forall u$
- Adjunto de L , denotado por L^+ : $\langle L^+u, v \rangle = \langle u, Lv \rangle \forall u, v$
- Autoadjunto: se $L^+ = L$, isto é, $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle \forall u, v$. Tal operador é dito simétrico ou hermitiano, conforme seja real ou complexo o espaço vetorial, respectivamente.
- Ortogonal ou unitário, conforme seja *real* ou *complexo* o espaço vetorial: se $L^+ = L^{-1}$.

Chegamos agora ao objetivo desta seção, as duas propriedades dos operadores hermitianos abaixo; para esse tipo de operador, tem-se que:

Propriedades dos operadores hermitianos:

OH-1) São reais os autovalores.

OH-2) São ortogonais os autovetores correspondentes a autovalores distintos.

De fato, se $Lu_i = \lambda_i u_i$ $i = 1, 2, \dots$, sendo $L^+ = L$, e, lembrando que $u_i \neq 0$ (não há autovetor nulo), temos que

$$0 = \langle u_i, Lu_i \rangle - \langle Lu_i, u_i \rangle = \langle u_i, \lambda_i u_i \rangle - \langle \lambda_i u_i, u_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle - \lambda_i^* \langle u_i, u_i \rangle \\ = (\lambda_i - \lambda_i^*) \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i - \lambda_i^* = 0 \quad (\text{i.e., } \lambda_i \in \mathbb{R}) . \quad (2.12)$$

e, no caso de dois autovalores distintos $\lambda_i \neq \lambda_j$ (reais, como já demonstrado), temos que

$$0 = \langle u_i, Lu_j \rangle - \langle Lu_i, u_j \rangle = \langle u_i, \lambda_j u_j \rangle - \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle - \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle \\ = \underbrace{(\lambda_j - \lambda_i)}_{\neq 0} \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad (\text{i.e., } u_i \perp u_j) . \quad (2.13)$$

2.1.3 Expansão em Funções Ortogonais

Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto ortonormal de vetores do \mathbb{R}^n (de dimensão n), e considere o problema de escrever um vetor genérico v do \mathbb{R}^n como combinação linear daqueles vetores ortogonais:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i .$$

Como calcular esses coeficientes α_i ? Resposta: usando a relação de ortogonalidade dada por (2.9):

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \quad \Rightarrow \quad \langle u_i, v \rangle = \left\langle u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{||u_i||^2 \delta_{ij}} = \alpha_i ||u_i||^2 ,$$

donde a conclusão:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle u_i, v \rangle}{||u_i||^2} . \quad (2.14)$$

Considere agora o problema análogo no espaço de funções $F[\mu, \nu]$ (de dimensão infinita), o de escrever uma função $f(x)$ como combinação linear de um número infinito de funções ortogonais,

$$\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, \quad \text{sendo } \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \|\psi_i\|^2 \delta_{ij} \quad (2.15)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \psi_i(x) : \quad \text{expansão de } f(x) \text{ em série das funções ortogonais } \psi_i(x). \quad (2.16)$$

De posse da relação de ortogonalidade em (2.15), podemos realizar *formalmente* operações de produto escalar similares àqueles na dedução da equação (2.14) para obter uma fórmula, também similar, para os coeficientes da expansão de $f(x)$ na equação (2.16):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \psi_i(x) \Rightarrow \alpha_i = \frac{\langle \psi_i, v \rangle}{\|\psi_i\|^2} = \frac{\int_{\mu}^{\nu} \psi_i^*(x) f(x) w(x) dx}{\int_{\mu}^{\nu} |\psi_i(x)|^2 w(x) dx}. \quad (2.17)$$

Nessa expansão, temos os chamados coeficientes de Fourier de $f(x)$. Eles foram deduzidos formalmente, sem cogitar várias complicações:

1) Sabemos que um conjunto B de vetores é uma base se satisfizer dois requisitos: o de B ser linearmente independente e o de gerar todos os demais vetores ("gerar" significa reproduzir todos os vetores por meio de combinações lineares dos vetores de B). Aqui, estamos interessados apenas em bases formadas por vetores ortogonais, o que torna automaticamente satisfeito o requisito de independência linear. Já a questão de saber se B gera o espaço vetorial difere radicalmente conforme seja finita ou infinita a dimensão do espaço: quando a dimensão é finita, digamos igual a n , todo conjunto ortogonal de n vetores é uma base, mas, em espaços vetoriais de dimensão infinita, um conjunto ortogonal com uma infinidade de vetores não forma necessariamente uma base. Por exemplo, $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ é um conjunto ortogonal [considere (2.11) com $\ell = \pi$] contido no espaço $F[-\pi, \pi]$, mas esses senos não geram nenhuma função par definida em $[-\pi, \pi]$. Nesse intervalo, além dos senos, é necessário acrescentar os cossenos $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ para obtermos uma base.

2) Há também a questão de se aplicar a propriedade PE-2 (distributividade) a um produto escalar entre uma função e uma combinação linear de uma infinidade de funções:

$$\left\langle \psi_i, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi_j \right\rangle = \int_{\mu}^{\nu} \psi_i^*(x) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi_j(x) \right) w(x) dx \stackrel{(\dagger)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \int_{\mu}^{\nu} \psi_i^*(x) \psi_j(x) w(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle.$$

Nota-se nesse cálculo que a validade da passagem (\dagger) requer a integrabilidade termo a termo de uma série infinita de funções.

3) Há ainda a questão da convergência dessas séries, bem como outras questões cuja análise está fora dos nossos objetivos.

Diga-se, entretanto, que investigações bastante complicadas confirmam a validade da fórmula (2.17) sob condições bem determinadas. Quando estas são satisfeitas, temos em (2.17) a chamada série de Fourier generalizada de $f(x)$ formada pelas funções $\psi_i(x)$.

Como exemplo de (2.17), considere as funções $\psi_n(x) = \sin(n\pi x/\ell)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). De acordo com (2.11) [observe a função peso *unitária*], elas formam um conjunto ortogonal em $[0, \ell]$. Calculando os coeficientes da série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

tendo em conta que

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2},$$

obtemos

$$b_n = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_0^{\ell} \psi_n^*(x) f(x) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ora, essa é a série de Fourier em senos da função $f(x)$ estudada na seção 5.3 da Apostila de Cálculo 4.

Nas aplicações, além das funções trigonométricas, surgem várias outras que também são ortogonais e em termos das quais se deseja expandir funções como uma série de Fourier generalizada. Tratamos disso na próxima seção, onde estudamos os *famosos problemas de Sturm-Liouville*, que oferece uma abordagem comum a diversos conjuntos de funções, tratando da questão da ortogonalidade e das séries de Fourier generalizadas formadas com elas, em vez de analisá-las caso a caso.

2.2 Teoria de Sturm-Liouville

Considere o operador diferencial linear

$$L = a_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x), \quad x \in (\mu, \nu). \quad (2.18)$$

O operador L apresenta uma propriedade importante: a de tornar-se hermitiano sob a escolha correta da função $w(x)$ do produto escalar na equação (2.10) e de certos tipos de condições (ditas condições de fronteira) nos extremos $x = \mu$ e $x = \nu$ do intervalo considerado. A caracterização dessa propriedade é o principal objetivo desta seção.

Admitimos que se encontram satisfeitas todas as condições necessárias para que as grandezas e operações envolvidas no desenvolvimento da teoria ora apresentada sejam bem definidas; assim, citem-se, desde já, as funções reais $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$, e as derivadas que compõem o operador L definido para $x \in (\mu, \nu)$, bem como toda integral \int_μ^ν [cujo cálculo, por convenção aqui adotada, há de ser segundo a extensão do conceito de integral dada por $\lim_{a \rightarrow \mu+}^{b \rightarrow \nu-} \int_a^b$] que surge nesse desenvolvimento [ela já apareceu no produto escalar em (2.10)]. Está fora do escopo deste texto descrever tais condições necessárias.

Para investigar a hermiticidade de L [Ref. [1, sec. 5.10]], consideramos duas funções complexas de variável real $f(x)$ e $g(x)$ arbitrárias e calculamos

$$\begin{aligned} \langle f, Lg \rangle &= \int_\mu^\nu f^*(x) Lg(x) w(x) dx = \int_\mu^\nu f^* (a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g) w dx \\ &= \left[w a_2 f^* g' + w a_1 f^* g \right]_\mu^\nu - \int_\mu^\nu [(w a_2 f^*)' g' + (w a_1 f^*)' g - w a_0 f^* g] dx, \end{aligned}$$

onde integramos por partes uma vez os termos envolvendo g'' e g' . Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \langle g, Lf \rangle^* \\ &= \left[w a_2 g f^{*'} + w a_1 g f^* \right]_\mu^\nu - \int_\mu^\nu [(w a_2 g)' f^{*'} + (w a_1 g)' f^* - w a_0 g f^*] dx, \end{aligned}$$

equação que pode ser obtida mais facilmente da anterior permutando f e g e tomando o complexo conjugado do resultado, lembrando que essas duas funções são complexas (as demais são reais) e que $f'^* = f^{*'}.$

Subtraindo membro a membro as duas equações deduzidas acima, obtemos

$$\langle f, Lg \rangle - \langle Lf, g \rangle = \left[w a_2 (f^* g' - f^{*'} g) \right]_\mu^\nu - \int_\mu^\nu [(w a_2)' - w a_1] (f^* g' - f^{*'} g) dx.$$

Esta equação mostra que, para L ser hermitiano, isto é, o 1º membro anular-se, é necessário e suficiente impor a condição de fronteira

$$\left[w a_2 (f^* g' - f^{*'} g) \right]_\mu^\nu = 0 \quad (2.19)$$

juntamente com a condição

$$(w a_2)' = w a_1, \quad (2.20)$$

pela qual se determina a função peso do produto escalar: $w(x) = [C/a_2(x)] e^{\int (a_1/a_2) dx}$. Esse resultado mostra que, para a função peso $w(x)$ ser positiva, de acordo com a exigência enunciada logo após (2.10), devemos nos restringir a EDOs em que a função $a_2(x)$ tenha sempre o mesmo sinal no intervalo (μ, ν) e escolher o sinal da constante de integração C igual ao de a_2 .

Nota:

Os problemas ditos *singulares*, nos quais o intervalo $[\mu, \nu]$ seja infinito ou a função $a_2(x)$ se anule em algum ou ambos extremos desse intervalo, requerem análise mais cuidadosa que não será abordada aqui; entretanto, as conclusões aqui traçadas permanecem válidas.

Convém usar (2.20) para substituir $a_1 = (w a_2)' / w$ em (2.18), eliminando a presença de a_1 , mas fazendo a função peso figurar explicitamente na expressão de L :

$$\begin{aligned} L\psi &= a_2 \psi'' + a_1 \psi' + a_0 \psi = a_2 \psi'' + [(w a_2)' / w] \psi' + a_0 \psi \\ &= [(w a_2) \psi'' + (w a_2)' \psi'] / w + a_0 \psi = (w a_2 \psi')' / w + a_0 \psi \\ &= \left[\underbrace{(w a_2 \psi')}'_u + \underbrace{w a_0 \psi}_{-v} \right] / w = -\frac{1}{w} \left(\frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} + v \right) \psi, \end{aligned}$$

onde, também por conveniência, em vez das funções arbitrárias a_2 e a_0 , passamos a usar as funções também arbitrárias^(*)

$$u(x) \equiv -w(x) a_2(x) \quad \text{e} \quad v(x) \equiv -w(x) a_0(x). \quad (2.21)$$

Podemos então dizer que o operador de Sturm-Liouville

$$L = -\frac{1}{w(x)} \left[\frac{d}{dx} u(x) \frac{d}{dx} + v(x) \right] \quad [x \in (\mu, \nu), \quad w(x) > 0] \quad (2.22)$$

^(*) L deixou de ser expresso em termos das três funções a_0 , a_1 e a_2 , passando a exibir as três novas funções u , v e w .

é hermitiano num espaço vetorial com produto escalar de função peso $w(x)$ e formado por funções que satisfaçam condições de fronteira que por sua vez tornem satisfeita a condição em (2.19).

A equação diferencial

$$L\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad , \quad (2.23)$$

com a substituição da expressão de L dada por (2.22), toma a forma da chamada equação de Sturm-Liouville:

$$\left[\frac{d}{dx} \left[u(x) \frac{d\psi}{dx} \right] + [v(x) + \lambda w(x)] \psi(x) = 0 \quad , \quad x \in (\mu, \nu) \right] . \quad (2.24)$$

Caso se rejeite a solução trivial $\psi(x) \equiv 0$, essa equação sob as condições de fronteira que tornem L hermitiano constitui um problema de autovalor, no qual se buscam os valores de λ (*autovalores*) que possibilitam soluções distintas da trivial (*autofunções*).

Denomina-se problema de Sturm-Liouville o problema de autovalor formado pela equação diferencial (2.24) e quaisquer condições de fronteira que impliquem a validade da condição (2.19)

$$\left[u(f^*g' - f'^*g) \right]_{\mu^+}^{\nu^-} = 0 \quad . \quad (2.25)$$

Note que, para a validade de (2.25) e, por conseguinte, da hermiticidade do operador L , os limites laterais não de ser únicos e finitos; ou seja:

$$\boxed{\text{Só devem ser aceitas soluções (autofunções) no intervalo } (\mu, \nu) \text{ tais que tanto ela quanto sua derivada possuam limites únicos e finitos quando } x \rightarrow \mu^+ \text{ e } x \rightarrow \nu^- .} \quad (2.26)$$

Além dessa exigência matemática, podem existir outras de natureza física, química, econômica, etc., sendo a mais corriqueira, e admitida em todos os problemas de resolução de EDPs considerados neste texto, a de não se aceitar que a autofunção se torne infinita em qualquer ponto de (μ, ν) .

A equação (2.25) estará satisfeita se f e g satisfizerem uma das condições CF-1 a CF-5 quando $x \rightarrow \mu^+$ e $x \rightarrow \nu^-$ ou ainda a condição CF-6 (que não envolve tais limites laterais) que seguem listadas abaixo:

$$\begin{aligned} \text{CF-1: } \psi(\mu^+) = \psi(\nu^-) = 0 & \dots\dots\dots \text{ condição do 1º tipo (Dirichlet)} \\ \text{CF-2: } \psi'(\mu^+) = \psi'(\nu^-) = 0 & \dots\dots\dots \text{ condição do 2º tipo (Neumann)} \\ \text{CF-3: } \begin{cases} \psi(\mu^+) + \alpha\psi'(\mu^+) = 0 \\ \psi(\nu^-) + \beta\psi'(\nu^-) = 0 \end{cases} \quad (\alpha \text{ e } \beta \text{ reais não nulos}) & \dots\dots\dots \text{ condição do 3º tipo (Robin)} \\ \text{CF-4: } u(\mu^+) = u(\nu^-) = 0 & \dots\dots\dots \text{ condição supressiva} \\ \text{CF-5: Uma das condições acima quando } x \rightarrow \mu^+ \text{ e outra quando } x \rightarrow \nu^- & \dots\dots \text{ condição mista} \\ \text{CF-6: } \psi \text{ e } u \text{ definidas em } \mathbb{R} \text{ e periódicas de mesmo período } \nu - \mu & \dots\dots \text{ condição periódica} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Outras condições poderiam ser citadas, mas listamos apenas as mais frequentes.

Ao serem modeladas (com base nas propriedades físicas, químicas, etc., do sistema), as condições de fronteira envolvem os limites laterais ou as derivadas laterais de ψ nos extremos do intervalo (μ, ν) considerado. Mas, note acima, que são usados os limites laterais ao invés das derivadas laterais. Não há inconsistência nisso, pois prova-se^(*) que são iguais esses limites laterais de derivadas e as respectivas derivadas laterais empregadas nas modelagens; isto é, $\psi'(\mu^+) = \psi'_+(\mu)$ e $\psi'(\nu^-) = \psi'_-(\nu)$.

No que segue, usaremos a expressão "uma condição CF-n" para fazer referência a uma das condições CF-1...CF-6 da lista acima. Também não mais escreveremos limites laterais para expressar as condições de fronteira, mas eles estarão implícitos; assim, ao escrevermos $\psi(\mu) = 0$ e $\psi'(\nu) = 0$ expressando uma condição mista Dirichlet-Neumann, subentende-se o uso dos limites laterais apropriados: $\psi(\mu^+) = 0$ e $\psi'(\nu^-) = 0$. É rara a necessidade de explicitar tais limites laterais nos cálculos. Por rigor, foram considerados no desenvolvimento da teoria; por simplicidade nas aplicações, são omitidos.

(*) Sendo a EDO (2.24) bem definida em (μ, ν) , uma solução ψ dela deve ser, no mínimo, duas vezes derivável e também contínua nesse intervalo. Além disso, ψ deve possuir os limites laterais quando $x \rightarrow \mu^+$ e $x \rightarrow \nu^-$ de acordo com (2.26). Logo, identificando $\psi(\mu)$ e $\psi(\nu)$ respectivamente com os valores de $\psi(\mu^+)$ e $\psi(\nu^-)$ oriundos da modelagem das condições de fronteira (sendo isso, na verdade, um complemento consistente da modelagem), tornamos ψ contínua no intervalo fechado $[\mu, \nu]$.

Em vista disso, ψ é contínua em $[\mu, \mu + h]$ e derivável em $(\mu, \mu + h)$, onde h é um incremento tal que $\mu + h \in [\mu, \nu]$, o que, com base no Teorema do Valor Médio, nos permite dizer que existe algum $c \in (\mu, \mu + h)$ tal que $[\psi(\mu + h) - \psi(\mu)]/h = \psi'(c)$. Tomando o limite de ambos os membros dessa equação quando $h \rightarrow 0^+$, isto é, $\lim_{h \rightarrow 0^+} [\psi(\mu + h) - \psi(\mu)]/h = \lim_{h \rightarrow 0^+} \psi'(c)$, obtemos, tendo em conta que c , situando-se entre μ e $\mu + h$, tende a μ pela direita, o que desejamos provar: $\psi'_+(\mu) = \psi'(\mu^+)$. De modo análogo prova-se que $\psi'_-(\nu) = \psi'(\nu^-)$. CQD.

No caso da condição CF-6, em que $\psi(x) = \psi(x+p) \forall x \in \mathbb{R}$ (com $p = \nu - \mu$), sendo todo o eixo real o domínio do problema, não é apropriado referir-se à condição periódica como uma condição de *fronteira*, pois, se $x \in (-\infty, \infty)$, não há fronteira! Além disso, encontramos frequentemente na literatura, no lugar da CF-6 acima, as equações $u(\mu) = u(\nu)$, $\psi(\mu) = \psi(\nu)$ e $\psi'(\mu) = \psi'(\nu)$, que decorrem da CF6 e produzem os mesmos resultados (mesmos autovalores e autofunções) que a CF6 produz, sendo, por isso, também denominadas condições periódicas.

Considere o problema de autovalor formado pela EDO de Sturm-Liouville $L\psi(x) = \lambda\psi(x)$, com L dado por (2.22), e por uma das condições acima (i.e., por uma condição CF-n). As soluções desse problema devem pertencer ao subespaço vetorial V_n de $F[\mu, \nu]$ contendo todas as funções que satisfazem a condição CF-n considerada, e como esse operador L é hermitiano em V_n [pois a condição (2.25) é satisfeita por duas funções f e g quaisquer de V_n], concluímos que, para esse problema de autovalor, são ortogonais as autofunções que correspondam a autovalores distintos, isto é,

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_{\mu}^{\nu} \psi_m^*(x) \psi_n(x) w(x) dx = 0 \text{ se } \lambda_m \neq \lambda_n . \quad (2.28)$$

A importância dos problemas de Sturm-Liouville reside no fato de que, ao se resolverem EDPs da Física Matemática pelo método de separação de variáveis, com frequência obtêm-se problemas de autovalor formados por EDOs lineares homogêneas de 2ª ordem sob condições de fronteira dos tipos listadas acima. Isso se respalda na possibilidade de se escrever qualquer desses problemas, genericamente descritos por $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = \lambda y(x)$, na forma da equação de Sturm-Liouville em (2.24), em que as funções u , v e w são determinadas usando-se (2.20) e (2.21).

Notas:

1) Logo após a condição em (2.25), afirmamos que qualquer condição CF-n imposta a f e g implica na validade daquela condição. Mostremos isso no caso da CF-3, o menos óbvio. O lado direito da equação (2.25) consiste na diferença de dois termos: um é calculado com $x = \nu$ e o outro com $x = \mu$. Ambos se anulam se f e g satisfazem a CF-3. De fato, para $x = \mu$, temos

$$\begin{cases} f(\mu) + \alpha f'(\mu) = 0 \\ g(\mu) + \alpha g'(\mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\mu) = -\alpha f'(\mu) \\ g(\mu) = -\alpha g'(\mu) \end{cases} ;$$

logo,

$$u(\mu) \left\{ f^*(\mu) g'(\mu) - f^{*'}(\mu) g(\mu) \right\} = u(\mu) \left\{ [-\alpha f'(\mu)]^* g'(\mu) - f^{*'}(\mu) [-\alpha g'(\mu)] \right\} = 0 ,$$

lembrando que α é real. Para provar que o termo com $x = \nu$ também se anula, age-se de modo análogo.

2) Usamos a denominação *supressiva* para a condição CF-4 porque a sua ocorrência numa parte da fronteira "suprime" a necessidade de, nessa parte, se impor alguma condição para ψ . À primeira vista parece que tal tipo de condição não impõe restrições às autofunções; observe, entretanto, que os pontos onde a função $u(x)$ se anula são pontos singulares da equação, onde geralmente a solução geral $\psi(x)$ também apresenta componentes singulares que geralmente devem ser descartados. Temos, nesse caso, o chamado *problema singular de Sturm-Liouville*; os outros são ditos regulares.

2.3 Problemas de Sturm-Liouville com a EDO $\psi'' + \lambda\psi(x) = 0$

O aluno já aprendeu, ao cursar Cálculo 4, que, na separação de variáveis das equações do calor e da onda, surge a EDO

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0 , \quad (2.29)$$

que é a equação de Sturm-Liouville (2.24) com $u(x) = 1$, $v(x) = 0$ e $w(x) = 1$. Assim, exigindo que a solução $\psi(x)$ de (2.29) satisfaça uma condição CF-n, obtemos um problema de autovalor cujas autofunções são ortogonais com respeito ao produto escalar de função peso unitária. Obviamente, problemas de autovalor formados por essa mesma EDO, mas sob condições de fronteira distintas, apresentam soluções (i.e., autofunções e autovalores) distintas. Abaixo resumimos os autovalores e as autofunções de problemas de Sturm-Liouville formados com a mesma EDO acima sob as condições de fronteira mais usuais (todas sendo uma condição CF-n). Fornecemos também, para cada problema de Sturm-Liouville, a série de Fourier generalizada de uma função $f(x)$ com base em (2.17).

Problema de autovalor (i)

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi(x) = 0 \\ x \in (0, \ell) , \quad \psi(0) = \psi(\ell) = 0 \text{ (Dirichlet)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \psi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} . \end{cases} \quad (2.30)$$

- Relação de ortogonalidade: $\int_0^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0 \text{ se } m \neq n .$

- Normas quadráticas: $\|\sin \frac{n\pi x}{\ell}\|^2 = \int_0^\ell \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2}$.

- Série de Fourier generalizada:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \text{ com } b_n = \frac{\left\langle \sin \frac{n\pi x}{\ell}, f \right\rangle}{\|\sin \frac{n\pi x}{\ell}\|^2} = \frac{\int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}{\ell/2}.$$

Esta é a série de Fourier em senos, já estudada em Cálculo 4.

Problema de autovalor (ii)

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda \psi(x) = 0 \\ x \in (0, \ell), \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0 \text{ (Neumann)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ \psi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{\ell}. \end{cases} \quad (2.31)$$

- Relação de ortogonalidade: $\int_0^\ell \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0$ se $m \neq n$.

- Normas quadráticas: $\|\cos \frac{n\pi x}{\ell}\|^2 = \int_0^\ell \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} \ell/2 & \text{se } n \geq 1 \\ \ell & \text{se } n = 0. \end{cases}$

- Série de Fourier generalizada:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \text{ com } a_n = \frac{\left\langle \cos \frac{n\pi x}{\ell}, f \right\rangle}{\|\cos \frac{n\pi x}{\ell}\|^2} = \begin{cases} \frac{\int_0^\ell f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}{\ell/2} & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{\int_0^\ell f(x) dx}{\ell} & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Esta é a série de Fourier em cossenos, já estudada em Cálculo 4.

Problema de autovalor (iii)

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda \psi(x) = 0 \\ x \in (0, \ell), \psi(0) = \psi'(\ell) = 0 \text{ (mista Dirichlet-Neumann)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2\ell}\right)^2 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \\ \psi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{2\ell}. \end{cases} \quad (2.32)$$

- Relação de ortogonalidade: $\int_0^\ell \sin \frac{m\pi x}{2\ell} \sin \frac{n\pi x}{2\ell} dx = 0$ se $m \neq n$.

- Normas quadráticas: $\|\sin \frac{n\pi x}{2\ell}\|^2 = \int_0^\ell \sin^2 \frac{n\pi x}{2\ell} dx = \frac{\ell}{2}$.

- Série de Fourier generalizada:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2\ell}, \text{ com } b_n = \frac{\left\langle \sin \frac{n\pi x}{2\ell}, f \right\rangle}{\|\sin \frac{n\pi x}{2\ell}\|^2} = \frac{\int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi x}{2\ell} dx}{\ell/2}$$

Problema de autovalor (iv)

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi(x) = 0 \\ x \in (0, \ell), \quad \psi'(0) = \psi(\ell) = 0 \quad (\text{mista Neumann-Dirichlet}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2\ell}\right)^2 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \\ \psi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2\ell} \end{cases} \quad (2.33)$$

- Relação de ortogonalidade: $\int_0^\ell \cos \frac{m\pi x}{2\ell} \cos \frac{n\pi x}{2\ell} dx = 0$ se $m \neq n$.

- Normas quadráticas: $\|\cos \frac{n\pi x}{2\ell}\|^2 = \int_0^\ell \cos^2 \frac{n\pi x}{2\ell} dx = \frac{\ell}{2}$.

- Série de Fourier generalizada:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2\ell}, \quad \text{com } a_n = \frac{\left\langle \cos \frac{n\pi x}{2\ell}, f \right\rangle}{\|\cos \frac{n\pi x}{2\ell}\|^2} = \frac{\int_0^\ell f(x) \cos \frac{n\pi x}{2\ell} dx}{\ell/2}$$

Problema de autovalor (v)

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R} : \quad \psi(x) = \psi(x + 2\ell) \\ (\text{CF-6, com } \nu - \mu = \text{período } 2\ell) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ \psi_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (b_0 = 0) \end{cases} \quad (2.34)$$

- Relação de ortogonalidade:

Se $m \neq n$, então qualquer das duas autofunções $\cos \frac{m\pi x}{\ell}$ e $\sin \frac{m\pi x}{\ell}$ é ortogonal a qualquer das duas autofunções $\cos \frac{n\pi x}{\ell}$ e $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ em qualquer intervalo I de largura igual ao período 2ℓ {por exemplo, $I = [0, 2\ell)$ ou $[-\ell, \ell)$ }; portanto, as relações de ortogonalidade são

$$\int_I \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \int_I \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \int_I \cos \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0 \quad \text{se } m \neq n.$$

- Normas quadráticas:

$$\|\cos \frac{n\pi x}{\ell}\|^2 = \int_I \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} \ell & \text{se } n \geq 1 \\ 2\ell & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

e

$$\|\sin \frac{n\pi x}{\ell}\|^2 = \int_I \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \ell.$$

- Série de Fourier generalizada de uma função $f(x)$ de período 2ℓ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

com

$$a_n = \frac{\left\langle \cos \frac{n\pi x}{\ell}, f \right\rangle}{\|\cos \frac{n\pi x}{\ell}\|^2} = \begin{cases} \frac{\int_I f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}{\ell} & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{\int_I f(x) dx}{2\ell} & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

e

$$b_n = \frac{\left\langle \sin \frac{n\pi x}{\ell}, f \right\rangle}{\|\sin \frac{n\pi x}{\ell}\|^2} = \frac{\int_I f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}{\ell},$$

que é a série de Fourier (completa) já estudada em Cálculo 4.

As soluções dos problemas (i), (ii), (v) e (vi) acima encontram-se deduzidas na seção 6.1 da apostila de Cálculo 4. Abaixo deduzimos as referentes aos problemas (iii) e (iv), buscando os autovalores (sabidamente reais) separadamente, isto é, conforme λ seja nulo, negativo ou positivo:

Resolução do problema de autovalor **(iii)** :

Para $\lambda = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow \psi'(x) = c_2 \\ \psi(0) = c_1 = 0 \\ \psi'(\ell) = c_2 \ell = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{logo, zero não é autovalor.} \end{cases}$$

Para $\lambda < 0 : \lambda \equiv -k^2 \ (k > 0)$:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx \\ \psi'(x) = c_1 k \sinh kx + c_2 k \cosh kx \\ \psi(0) = c_1 = 0 \\ \psi'(\ell) = c_2 \underbrace{k \cosh k\ell}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalor negativo.} \end{cases}$$

Para $\lambda > 0 : \lambda \equiv k^2 \ (k > 0)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_1 \cos kx + c_2 \sin kx . \\ \psi'(x) &= -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx . \\ \psi(0) &= c_1 = 0 \Rightarrow \underline{\psi(x) = c_2 \sin kx} . \\ \psi'(\ell) &= c_2 k \cos k\ell = 0 \xrightarrow{(*)} \cos k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi/2 \Rightarrow k = k_n = n\pi/2\ell \ (n = 1, 3, 5, 7 \dots) . \end{aligned}$$

(*) admitimos $c_2 \neq 0$ para viabilizar solução $\psi(x)$ não nula

(†) excluímos $n = \dots -7, -5, -3, -1$ e 0 , pois $k > 0$

Logo, $\lambda = \lambda_n = k_n^2 = (n\pi/2\ell)^2 \ (n = 1, 3, 5 \dots)$ são os autovalores, e $\psi_n(x) = c_{2n} \sin(n\pi x/2\ell)$ são as autofunções correspondentes, nas quais as constantes c_{2n} podem ser ignoradas, pois basta tomar uma única autofunção do autoespaço de λ_n . Estão assim justificados os resultados em (2.32).

Resolução do problema de autovalor **(iv)** :

Para $\lambda = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow \psi'(x) = c_2 \\ \psi'(0) = c_2 = 0 \\ \psi(\ell) = c_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{logo, zero não é autovalor.} \end{cases}$$

Para $\lambda < 0 : \lambda \equiv -k^2 \ (k > 0)$:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx \\ \psi'(x) = c_1 k \sinh kx + c_2 k \cosh kx \\ \psi'(0) = c_2 k = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ (pois } k \neq 0) \\ \psi(\ell) = c_1 \underbrace{\cosh k\ell}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalor negativo.} \end{cases}$$

Para $\lambda > 0 : \lambda \equiv k^2 \ (k > 0)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_1 \cos kx + c_2 \sin kx . \\ \psi'(x) &= -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx . \\ \psi'(0) &= c_2 k = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ (pois } k \neq 0) \Rightarrow \underline{\psi(x) = c_1 \cos kx} . \\ \psi(\ell) &= c_1 \cos k\ell = 0 \xrightarrow{(*)} \cos k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi/2 \Rightarrow k = k_n = n\pi/2\ell \ (n = 1, 3, 5, 7 \dots) . \end{aligned}$$

(*) admitimos $c_1 \neq 0$ para viabilizar solução $\psi(x)$ não nula

(†) excluímos $n = \dots -7, -5, -3, -1$ e 0 , pois $k > 0$

Logo, $\lambda = \lambda_n = k_n^2 = (n\pi/2\ell)^2 \ (n = 1, 3, 5 \dots)$ são os autovalores, e $\psi_n(x) = \cos(n\pi x/2\ell)$ (ignorando-se quaisquer constantes multiplicativas) são as autofunções correspondentes. Estão assim justificados os resultados em (2.33).

2.4 Problemas de Sturm-Liouville Com Outras EDOs

Seguem duas outras EDOs que, em capítulos vindouros, surgirão quando resolvermos certas EDPs pelo método de separação de variáveis. Aqui, nesta seção, não resolveremos problemas de autovalor baseados nelas pelo simples fato de ainda não termos discutido as soluções delas; isso é feito no Cap. 4.

$$\text{i)} \quad x^2 \psi'' + x \psi' + (\lambda x^2 - \nu^2) \psi(x) = 0. \quad (2.35)$$

No Cap.5, veremos que as autofunções de problemas de autovalor com essa EDO são as chamadas *funções de Bessel*. Obtemo-la na forma da equação de Sturm-Liouville, (2.24), com $u(x) = x$, $v(x) = -\nu^2/x$ e $w(x) = x$:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\psi}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x} \right) \psi(x) = 0. \quad (2.36)$$

Portanto, as autofunções são ortogonais com respeito à função peso $w(x) = x$:

$$\int \psi_m(x) \psi_n(x) x dx = 0 \quad \text{se } m \neq n,$$

sendo a integração efetuada no intervalo em que a EDO é resolvida.

$$\text{ii)} \quad (1 - x^2) \psi'' - 2x \psi' + \lambda \psi(x) = 0. \quad (2.37)$$

Essa EDO é a de Sturm-Liouville com $u(x) = 1 - x^2$, $v(x) = 0$ e $w(x) = 1$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d\psi}{dx} \right] + \lambda \psi(x) = 0.$$

Com frequência resolve-se essa EDO no intervalo $(-1, 1)$. Neste caso, o fato de $u(x) = 1 - x^2$ anular-se quando $x \rightarrow -1^+$ e $x \rightarrow 1^-$ [uma condição de fronteira do tipo CF-4: supressiva] torna (2.37) singular nesses pontos, nos quais a exigência da existência dos limites de ψ e ψ' quando $x \rightarrow -1^+$ e $x \rightarrow 1^-$ condiciona o parâmetro λ a tomar apenas certos valores (os autovalores). Assim, o problema de encontrar as soluções não nulas da EDO (2.37) com $x \in (-1, 1)$ sob as exigências delineadas em (2.26) é, por si só (sem qualquer condição de fronteira), um problema de autovalor. Veremos que as autofunções são formadas pelos conhecidos *Polinômios de Legendre*, estudados no Capítulo 4 e usados no Capítulo 6.

2.5 Série de Fourier Generalizada Dupla e Tripla

Sejam $\{\psi_n(\xi)\}_{n=1,2,\dots}$ e $\{\phi_n(\eta)\}_{n=1,2,\dots}$ dois conjuntos ortogonais com respeito a produtos escalares de funções peso $w_1(\xi)$ e $w_2(\eta)$, respectivamente, provenientes de problemas de Sturm-Liouville distintos, sendo as relações de ortogonalidade dadas por

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle_1 = \int_{\mu_1}^{\nu_1} \psi_m^*(\xi) \psi_n(\xi) w_1(\xi) d\xi = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

e

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_2 = \int_{\mu_2}^{\nu_2} \phi_m^*(\eta) \phi_n(\eta) w_2(\eta) d\eta = 0 \quad \text{se } m \neq n,$$

onde, para distinguir os produtos escalares, apomos o subíndice 1 ou 2 ao parêntese angulado direito. É frequente a ocorrência de séries duplas do tipo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \psi_m(\xi) \phi_n(\eta) = f(\xi, \eta), \quad (2.38)$$

em que se deseja calcular os coeficientes c_{mn} da expansão de $f(\xi, \eta)$ nas citadas autofunções. Mostraremos que tais coeficientes são dados por

$$c_{mn} = \frac{\int_{\mu_2}^{\nu_2} \int_{\mu_1}^{\nu_1} f(\xi, \eta) \psi_m^*(\xi) \phi_n^*(\eta) w_1(\xi) w_2(\eta) d\xi d\eta}{\|\psi_m(\xi)\|^2 \|\phi_n(\eta)\|^2}. \quad (2.39)$$

Prova:

Basta, começando com a equação (2.38), tomar, pela esquerda, o produto escalar de ambos os membros por ϕ_n e, depois, na equação resultante, por ψ_m , usando a distributividade do produto escalar bem como as relações de ortogonalidade $\langle \phi_n, \phi_{n'} \rangle_2 = \|\phi_n\|^2 \delta_{n'n}$ e $\langle \psi_m, \psi_{m'} \rangle_1 = \|\psi_m\|^2 \delta_{m'm}$; observe:

$$f = \sum_{m', n'} c_{m'n'} \psi_{m'} \phi_{n'} \Rightarrow \langle \phi_n, f \rangle_2 = \sum_{m', n'} c_{m'n'} \psi_{m'} \underbrace{\langle \phi_n, \phi_{n'} \rangle_2}_{\|\phi_n\|^2 \delta_{n'n}} = \|\phi_n\|^2 \sum_{m'} c_{m'n} \psi_{m'} \Rightarrow$$

$$\langle \psi_m, \langle \phi_n, f \rangle_2 \rangle_1 = \|\phi_n\|^2 \sum_{m'} c_{m'n} \underbrace{\langle \psi_m, \psi_{m'} \rangle_1}_{\|\psi_m\|^2 \delta_{m'm}} = \|\psi_m\|^2 \|\phi_n\|^2 c_{mn} \Rightarrow c_{mn} = \frac{\langle \psi_m, \langle \phi_n, f \rangle_2 \rangle_1}{\|\psi_m\|^2 \|\phi_n\|^2},$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \psi_m, \langle \phi_n, f \rangle_2 \rangle_1 &= \int_{\mu_1}^{\nu_1} \psi_m^* \langle \phi_n, f \rangle_2 w_1 d\xi = \int_{\mu_1}^{\nu_1} \psi_m^* \left\{ \int_{\mu_2}^{\nu_2} \phi_n^* f w_2 d\eta \right\} w_1 d\xi \\ &= \int_{\mu_2}^{\nu_2} \int_{\mu_1}^{\nu_1} f(\xi, \eta) \psi_m^*(\xi) \phi_n^*(\eta) w_1(\xi) w_2(\eta) d\xi d\eta. \quad \text{CQD} \end{aligned}$$

Há também séries triplas, quádruplas, etc. Exemplo de série tripla:

$$\sum_l \sum_m \sum_n c_{lmn} \psi_l(\xi) \phi_m(\eta) \chi_n(\zeta) = f(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.40)$$

Se $\{\psi_l(\xi), \xi \in [\mu_1, \nu_1]\}$, $\{\phi_m(\eta), \eta \in [\mu_2, \nu_2]\}$ e $\{\chi_l(\zeta), \zeta \in [\mu_3, \nu_3]\}$ são conjuntos ortogonais com respeito às funções peso $w_1(\xi)$, $w_2(\eta)$ e $w_3(\zeta)$, respectivamente, é fácil mostrar, por uma extensão óbvia da prova apresentada acima para o caso da série dupla, que

$$c_{lmn} = \frac{\int_{\mu_3}^{\nu_3} \int_{\mu_2}^{\nu_2} \int_{\mu_1}^{\nu_1} f(\xi, \eta, \zeta) \psi_l^*(\xi) \phi_m^*(\eta) \chi_n^*(\zeta) w_1(\xi) w_2(\eta) w_3(\zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\|\psi_l(\xi)\|^2 \|\phi_m(\eta)\|^2 \|\chi_n(\zeta)\|^2}. \quad (2.41)$$

Vejamos um exemplo da série dupla na equação (2.38), considere os dois conjuntos de funções $\{\sin(m\pi x)/\ell\}_{m=1,2,3,\dots}$ e $\{\cos(n\pi y)/2h\}_{n=1,3,5,\dots}$. Eles são ortogonais com respeito a produtos escalares de funções peso unitárias, pois são formados por autofunções dos problemas de Sturm-Liouville (i) e (iv) listados na seção 2.3. Temos portanto que se

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h},$$

então os coeficientes, segundo a equação (2.39), são dados por

$$c_{mn} = \frac{\int_0^h \int_0^\ell f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h} dx dy}{\|\sin \frac{m\pi x}{\ell}\|^2 \|\cos \frac{n\pi y}{2h}\|^2},$$

onde

$$\|\sin \frac{m\pi x}{\ell}\|^2 = \int_0^\ell \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2} \quad \text{e} \quad \|\cos \frac{n\pi y}{2h}\|^2 = \int_0^h \cos^2 \frac{n\pi y}{2h} dy = \frac{h}{2}.$$

Note que, nas séries de Fourier nas equações (2.38) e (2.40), admitimos que cada tipo de autofunção tem um índice apenas. Mas a dependência indicial pode ser mais intrincada, havendo autofunções que têm dois ou mais índices, sendo alguns deles em comum com autofunções de outra categoria. Mas, ainda assim, os coeficientes são calculados por fórmulas como aquela na equação (2.41). Para exemplificar isso, tomemos a seguinte expansão de uma função das coordenadas esféricas nas autofunções ortogonais que surgem na resolução da equação do calor ou onda numa esfera de raio b centrada na origem, isto é,

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{nlm} R_{ln}(r) \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (2.42)$$

(não é necessário aqui expor os detalhes dessas autofunções), sendo as relações de ortogonalidade dadas por (observe as funções peso r^2 , $\sin \theta$ e 1)

$$\begin{aligned} \langle R_{ln'}, R_{ln} \rangle_r &= \int_0^b R_{ln'}^*(r) R_{ln}(r) r^2 dr = \|R_{ln}(r)\|^2 \delta_{n'n}, \\ \langle \Theta_{l'm}, \Theta_{lm} \rangle_\theta &= \int_0^\pi \Theta_{l'm}^*(\theta) \Theta_{lm}(\theta) \sin \theta d\theta = \|\Theta_{lm}(\theta)\|^2 \delta_{l'l}, \\ \langle \Phi_{m'}, \Phi_m \rangle_\varphi &= \int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^*(\varphi) \Phi_m(\varphi) d\varphi = \|\Phi_m(\varphi)\|^2 \delta_{m'm}. \end{aligned}$$

Os coeficientes dessa série são obtidos pelo mesmo procedimento usado para a série em (2.38): tomamos o produto escalar de ambos os membros de (2.42), pela esquerda, por Φ_m , Θ_{lm} e R_{nl} (nessa ordem), usando, em cada etapa, a distributividade do produto escalar e a relação de ortogonalidade associada a este. O resultado é

$$c_{lmn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b f(r, \theta, \varphi) R_{ln}^*(r) \Theta_{lm}^*(\theta) \Phi_m^*(\varphi) (r^2) (\sin \theta) (1) dr d\theta d\varphi}{\|R_{ln}(r)\|^2 \|\Theta_{lm}(\theta)\|^2 \|\Phi_m(\varphi)\|^2}, \quad (2.43)$$

onde

$$\|R_{ln}(r)\|^2 = \int_0^b R_{ln}^2(r) r^2 dr, \quad \|\Theta_{lm}(\theta)\|^2 = \int_0^\pi \Theta_{lm}^2(\theta) \sin \theta d\theta \quad \text{e} \quad \|\Phi_m(\varphi)\|^2 = \int_0^{2\pi} \Phi_m^2(\varphi) d\varphi.$$

2.6 Ausência de Autovalores Negativos

Nesta seção, provamos que nenhum dos autovalores de um problema de Sturm-Liouville é negativo quando as condições de fronteira forem aquelas em (2.27), exceto a CF-3, e, na EDO (2.24), $u(x) \geq 0$ e $v(x) \leq 0$ para $x \in (\mu, \nu)$. Note que essas condições para as funções u e v encontram-se satisfeitas nos problemas de Sturm-Liouville já mencionados.

Para o operador L em (2.22), temos que

$$\begin{aligned} -\langle \psi, L\psi \rangle &= \int_{\mu}^{\nu} \frac{\psi^*}{w} [(u\psi')' + v\psi] w \, dx = \int_{\mu}^{\nu} \psi^* (u\psi')' \, dx + \int_{\mu}^{\nu} u^{\nu} \psi^* v \psi \, dx \\ &= \underbrace{\left[\psi^* (u\psi') \right]_{\mu}^{\nu}}_0 - \int_{\mu}^{\nu} \psi^* u \psi' \, dx + \int_{\mu}^{\nu} v |\psi|^2 \, dx, \end{aligned}$$

onde o primeiro termo se anula por causa das condições de fronteira consideradas: CF-1,2,4,5,6. Logo,

$$\langle \psi, L\psi \rangle = \int_{\mu}^{\nu} |u| |\psi|^2 \, dx + \int_{\mu}^{\nu} |v| |\psi|^2 \, dx \geq 0,$$

pois $u(x) \geq 0$ e $v(x) \leq 0$ no intervalo (μ, ν) .

Mas

$$\langle \psi, L\psi \rangle = \langle \psi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \psi, \psi \rangle = \lambda \|\psi\|^2,$$

onde, $\langle \psi, L\psi \rangle \geq 0$, de acordo com o resultado anterior, e $\|\psi\|^2 > 0$. Está provado, portanto, que $\lambda \geq 0$ sob as condições estabelecidas.

De acordo com esse resultado, não havia necessidade, na seção 2.3, ter suposto $\lambda = -k^2$ na busca dos autovalores, mas negligenciamos o que acabamos de provar por considerarmos instrutiva a análise desse caso, tanto que, mais adiante, pela mesma razão, continuaremos considerando a hipótese $\lambda = -k^2$, ainda que já cientes da inexistência de autovalores negativos.

Capítulo 3

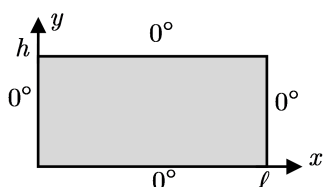
Aplicações das Séries de Fourier Trigonométricas na Resolução de EDPs

- Ref. [5], seq. 12.3, 12.5 e 12.8
- Ref. [8], seq. 12.7 (Exemplo 2) e 12.8
- Ref. [6], cap. 2

3.1 Equações do Calor e da Onda nas Coordenadas Cartesianas em Mais De Uma Dimensão

O estudo desta seção deve ser precedido de uma revisão das equações *unidimensionais* do calor e da onda empreendido nas seções 6.2 e 6.3 da Apostila de Cálculo 4. Aqui resolveremos tais problemas em duas ou três dimensões.

—— **Exemplo 3.1.1.** Cálculo da temperatura $T(x, y, t)$ na placa retangular mostrada na figura, de bordas submetidas a 0° e inicialmente à temperatura $T_0(x, y)$.



Vamos primeiramente proceder à chamada separação espaço-temporal: admitimos que

$$T(x, y, t) \equiv \psi(x, y) \tau(t), \quad (3.1)$$

isto é, que a solução $T(x, y, t)$ é produto da função só das coordenadas espaciais $\psi(x, y, z)$ pela função só do tempo $\tau(t)$ (a *parte espacial* e a *parte temporal* da solução, respectivamente), e então substituímos essa expressão de T na equação do calor:

$$\nabla^2 T(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2(\psi\tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}(\psi\tau) \Rightarrow \tau \nabla^2 \psi = \frac{1}{\alpha} \psi \tau' \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{\tau'}{\alpha \tau} \equiv -\lambda \text{ (constante)} \\ \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(x, y) = 0 & \dots\dots\dots \text{EDP espacial (equação de Helmholtz)} \\ \tau' + \lambda \alpha \tau(t) = 0 & \dots\dots\dots \text{EDO temporal} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Além disso, como consequência de (3.1), as condições de fronteira desse problema de calor – dadas por $T(x, y, t) = 0$ se (x, y) for um ponto na borda da placa –, por serem homogêneas, se transferem para a parte espacial $\psi(x, y)$:

$$T(x, y, t) = \psi(x, y) \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y) \text{ na borda da placa.} \quad (3.4)$$

Portanto, como nos problemas unidimensionais, a parte espacial da solução deve ser solução de um problema de autovalor formado pela chamada equação de Helmholtz apresentada em (3.3) e pelas condições de fronteira em (3.4), isto é,

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(x, y) = 0 & \text{no domínio } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, \ell), y \in (0, h)\} \\ \psi(x, y) = 0 & \text{na fronteira de } D. \end{cases} \quad (3.5)$$

Esse é um problema de autovalor bidimensional, possuindo autofunções $\psi(x, y)$ correspondentes aos autovalores de λ . Para resolvê-lo, realizamos outra separação, a das variáveis x e y :

$$\psi(x, y) \equiv X(x)Y(y). \quad (3.6)$$

A substituição dessa equação na EDP espacial em (3.3) fornece

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)XY + \lambda XY = X''Y + XY'' + \lambda XY = 0 \quad \xrightarrow{\div XY} \quad \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \lambda = 0, \quad (3.7)$$

uma forma que apresenta dois termos separados que dependem de apenas uma variável e que, portanto, devem ser constantes; acima foram igualados às constantes de separação $(-\mu)$ e $(-\nu)$. Assim surgem as EDOs

$$X'' + \mu X(x) = 0 \quad \text{e} \quad Y'' + \nu Y(y) = 0,$$

que, para serem resolvidas, é necessário considerar as condições de fronteira para $X(x)$ e $Y(y)$ que podem ser deduzidas daquelas para ψ , na equação (3.4), usando a equação (3.1):

$$\psi(x_0, y) = X(x_0) \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x_0) = 0 \text{ se } x_0 = 0 \text{ ou } \ell, \quad (3.8)$$

$$\psi(x, y) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y_0) = 0 \text{ se } y_0 = 0 \text{ ou } h. \quad (3.9)$$

Como consequência, as partes X e Y da expressão de $T (= XY\tau)$ devem ser autofunções de problemas de autovalor (unidimensionais), sendo ambos, no caso, do mesmo tipo do Prob. (i) resolvido na seção 2.3. Escrevamos-os juntamente com as soluções:

$$\begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0, & x \in (0, \ell) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\ell)^2 & (m = 1, 2, \dots) \\ X_m(x) = \text{sen}(m\pi x/\ell) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, h) \\ Y(0) = Y(h) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nu_n = (n\pi/h)^2 & (n = 1, 2, \dots) \\ Y_n(y) = \text{sen}(n\pi y/h) \end{cases}$$

Desses resultados obtemos as soluções do problema de autovalor bidimensional formulado em (3.5). Como $\lambda = \mu + \nu$ [cf. (3.7)] e $\psi = XY$, podemos escrever:

$$\begin{cases} \nabla^2 + \lambda \psi(x, y) = 0, & (x, y) \in (0, \ell) \times (0, h) \\ \psi = 0 \text{ se } x = 0 \text{ ou } x = \ell \\ \psi = 0 \text{ se } y = 0 \text{ ou } y = h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_{mn} = (m\pi/\ell)^2 + (n\pi/h)^2 \\ \psi_{mn}(x, y) = \text{sen} \frac{m\pi x}{\ell} \text{sen} \frac{n\pi y}{h} \\ m, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Agora calculamos a solução $\tau_{mn}(t)$ da EDO temporal separada em (3.3), com λ dado em (3.7):

$$\tau'_{mn} + \lambda_{mn}\tau_{mn}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{mn}(t) = e^{-\lambda_{mn}\alpha t}. \quad (3.11)$$

Vale ressaltar que, para resolver o problema de autovalor bidimensional, convertemo-lo em dois problemas de autovalor unidimensionais usando o método de separação de variáveis. Além disso, observe que a enumeração dos autovalores e das autofunções acima é feita com dois índices. No último exemplo deste capítulo, tridimensional, veremos que três índices são necessários. Mas isso não é regra geral, havendo, por exemplo, problemas tridimensionais cujos autovalores são enumerados por meio de dois índices.

Estão determinadas, portanto, tanto a parte espacial da solução, dadas pelas autofunções $\psi_{mn}(x, y)$, quanto a temporal, dada por (3.11). A solução geral é a combinação linear das soluções $T_{mn}(x, y, t) = \psi_{mn}(x, y)\tau_{mn}(t)$, isto é,

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{\ell} \text{sen} \frac{n\pi y}{h} e^{-\lambda_{mn}\alpha t}, \quad \lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2. \quad (3.12)$$

Nota: Chamamos de "solução geral" a solução que se obtém na forma de uma série infinita pelo método de separação de variáveis e que satisfaz todas as condições de fronteira *homogêneas*. Na verdade, deveríamos nos referir a ela como a *solução mais geral* que esse procedimento fornece, pois não se provou que ela é de fato a solução geral. Ela se torna a solução específica do problema físico quando os coeficientes da série são determinados a partir das condições não homogêneas, tais como, por exemplo, as condições iniciais, que é o próximo passo dessa resolução.

Para determinar os coeficientes A_{mn} da solução geral, impomos que ela satisfaça a condição inicial do problema:

$$T(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} = T_0(x, y) .$$

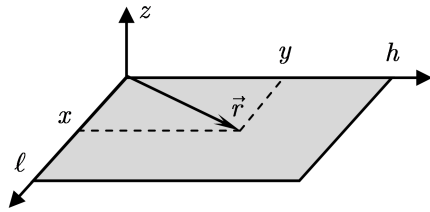
Essa equação, de acordo com as equações (2.38) e (2.39), mostra que

$$A_{mn} = \frac{\int_0^h \int_0^\ell T_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy}{\underbrace{\left\| \sin \frac{m\pi x}{\ell} \right\|^2}_{\ell/2} \underbrace{\left\| \sin \frac{n\pi y}{h} \right\|^2}_{h/2}} , \quad (3.13)$$

onde os valores das normas quadráticas indicados são os das autofunções do Prob. (i) na seção 2.3.

A solução do problema é dada pelos resultados quadriculados: equações (3.12) e (3.13). Observe o correto comportamento assintótico no tempo: $T(x, y, t \rightarrow \infty) = 0$.

—— **Exemplo 3.1.2.** Cálculo da deflexão $z(\vec{r}, t) = z(x, y, t)$ de uma membrana retangular de bordas fixas (v. figura), largada inicialmente com a forma dada por $z = z_0(x, y)$ e as velocidades de seus pontos dadas por $\partial z / \partial t = v_0(x, y)$.



a) *FORMULAÇÃO:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, y, t), \quad (x, y) \in (0, \ell) \times (0, h) \\ z(\vec{r}, t) = 0 \text{ se } \vec{r} \in \text{bordas (condições de fronteira)} \\ z(\vec{r}, 0) = z(x, y, 0) = z_0(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(\vec{r}, 0) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y) \end{array} \right\} \text{ (condições iniciais)}$$

b) *SEPARAÇÃO ESPAÇO-TEMPORAL:*

$$\begin{aligned} z(x, y, t) \equiv \psi(x, y)\tau(t) &\Rightarrow \nabla^2(\psi\tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi\tau}{\partial t^2} \Rightarrow \tau \nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \psi \tau'' \\ \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''}{\tau} \equiv -\lambda \text{ (constante)} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(x, y) = 0 \text{ (Eq. de Helmholtz)} \\ \tau' + \lambda c^2 \tau(t) = 0 \text{ (EDO temporal)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Observe que, como no problema de calor do exemplo anterior, também a parte espacial ψ da solução da equação da onda deve satisfazer a equação de Helmholtz. A diferença entre este exemplo (onda) e o anterior (calor) reside na parte temporal. Ao final deste capítulo listaremos as similaridades e as diferenças nas soluções das equações da onda e do calor.

c) *PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA A PARTE ESPACIAL:*

As condições de fronteira para $\psi(x, y)$ são deduzidas a partir daquelas para $z(x, y, t)$ de modo análogo ao feito na equação (3.4), similarmente obtendo-se $\psi = 0$ nos pontos das bordas em $x = 0$, $x = \ell$, $y = 0$ e $y = h$ da membrana. Ora, tais condições de fronteira e a equação de Helmholtz (separada acima) formam o mesmo problema de autovalor bidimensional do exemplo anterior. Ou seja, continua válido aqui o que se apresenta em (3.10).

d) *A PARTE TEMPORAL CORRESPONDENTE AO AUTOVALOR $\lambda = \lambda_{mn}$:*

Como todos os autovalores são positivos, podemos definir

$$\omega_{mn} \equiv c\sqrt{\lambda_{mn}} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{n}{h}\right)^2} \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots)$$

para escrever a EDO temporal e então resolvê-la como segue:

$$\tau''_{mn} + \omega_{mn}^2 \tau_{mn} = 0 \Rightarrow \tau_{mn}(t) = A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t .$$

e) *SOLUÇÃO GERAL:*

Esta é a combinação linear de todas as soluções $z_{mn}(x, y, t) = \psi_{mn}(x, y)\tau_{mn}(t)$:

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} . \quad (3.14)$$

Diga-se, de passagem, que, para cada par de valores de m e n , $z_{mn}(x, y, t) = \psi_{mn}(x, y)\tau_{mn}(t)$ é dito um *modo de vibração*, em que toda a membrana vibra harmonicamente com a frequência angular ω_{mn} , sendo $\psi_{mn}(x, y)$ a amplitude da oscilação no ponto (x, y) .

f) CÁLCULO DOS COEFICIENTES NA SOLUÇÃO GERAL

Impondo as condições iniciais, obtemos

$$z(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} = z_0(x, y)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} = v_0(x, y).$$

Devemos então calcular A_{mn} e $\omega_{mn} B_{mn}$ como sendo os coeficientes de uma série dupla de Fourier de $z_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$, respectivamente. Logo, de acordo com a seção 2.5, e já substituindo os conhecidos valores das normas quadráticas envolvidas, temos que

$$A_{mn} = \frac{4}{\ell h} \int_0^h \int_0^\ell z_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy, \quad (3.15)$$

$$\omega_{mn} B_{mn} = \frac{4}{\ell h} \int_0^h \int_0^\ell v_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy. \quad (3.16)$$

As equações (3.14), (3.15) e (3.16) fornecem a solução deste problema ondulatório.

3.2 Peculiaridades das Resoluções dos Problemas de Calor e Onda

Considere o problema de resolver, numa região R (da reta, do plano ou do espaço) de fronteira ∂R , as EDPs

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) \dots\dots\dots \text{equação do calor homogênea} \quad (3.17)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{r}, t) \dots\dots\dots \text{equação da onda homogênea} \quad (3.18)$$

sob condições de fronteira *homogêneas*. Realizando a separação separação espaço-temporal, obtemos

$$T(\vec{r}, t) \equiv \psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{\tau'}{\alpha \tau} \equiv -\lambda \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(\vec{r}) = 0 \\ \tau' + \lambda \alpha \tau(t) = 0 \end{cases} \quad (3.19a)$$

e

$$u(\vec{r}, t) \equiv \psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{\tau''}{c^2 \tau} \equiv -\lambda \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(\vec{r}) = 0 \\ \tau'' + \lambda c^2 \tau(t) = 0 \end{cases} \quad (3.19b)$$

onde o uso das mesmas letras ψ , τ e λ em dois problemas distintos não causará confusão.

Nos problemas de calor e onda já resolvidos acima, observamos o seguinte:

a) Tanto no problema de calor quanto no de onda, após a separação espaço-temporal $\psi(\vec{r})\tau(t)$ da solução, verifica-se que a parte espacial $\psi(\vec{r})$ satisfaz a equação de Helmholtz homogênea,

$$\nabla^2 \psi + \lambda \psi(\vec{r}) = 0. \quad (3.20)$$

[que, em uma dimensão, torna-se $\psi'' + \lambda \psi(x) = 0$, a EDO espacial obtida nos problemas unidimensionais de calor e onda resolvidos nas seções 6.1 e 6.2 da Apostila de Cálculo 4].

b) A resolução da EDP (3.20) sob a imposição de ψ satisfazer *as mesmas* condições de fronteira do problema de calor ou onda original é um problema de valor de fronteira homogêneo que constitui um problema de autovalor. Ao solucionar este problema, obtém-se uma infinidade de soluções $\psi_\lambda(\vec{r})$ (autofunções) e de valores (autovalores) da constante λ originada na separação espaço-temporal.

c) Uma vez determinados tais autovalores, a EDO temporal pode ser revolvida para se determinar completamente a parte temporal $\tau_\lambda(t)$ correspondente a cada autovalor de λ , a menos das constantes arbitrárias que surgem na resolução dessa EDO, ainda indeterminadas neste momento.

No caso da equação do calor, $\tau_\lambda(t)$ é solução de $\tau'_\lambda + \lambda\alpha\tau_\lambda(t) = 0$, isto é,

$$\tau_\lambda(t) = A_\lambda e^{-\lambda\alpha t} . \quad (3.21)$$

Observe, em particular, que $\tau_0(t) = A_0$ (constante) é a parte temporal associada ao autovalor nulo $\lambda_0 = 0$, quando este ocorre.

No caso da equação da onda, $\tau_\lambda(t)$ é solução de $\tau''_\lambda(t) + \lambda c^2 \tau_\lambda(t) = 0$, isto é,

$$\tau_\lambda(t) = \begin{cases} A_\lambda \cos \omega_\lambda t + B_\lambda \sin \omega_\lambda t & (\omega_\lambda \equiv c\sqrt{\lambda}) \text{ se } \lambda > 0 \\ A_0 + B_0 t & \text{se } \lambda = 0 . \end{cases} \quad (3.22)$$

Portanto, a solução geral da equação do calor ou onda é a combinação linear das soluções $T_\lambda(\vec{r}, t)$ ou $u_\lambda(\vec{r}, t)$ dadas por $\psi_\lambda(\vec{r})\tau_\lambda(t)$:

$$T_\lambda(\vec{r}, t) = \sum_\lambda A_\lambda e^{-\lambda\alpha t} \psi_\lambda(\vec{r}) , \quad (3.23)$$

$$u_\lambda(\vec{r}, t) = \underbrace{(A_0 + B_0 t)}_* \psi_0(\vec{r}) + \sum_\lambda (A_\lambda \cos \omega_\lambda t + B_\lambda \sin \omega_\lambda t) \psi_\lambda(\vec{r}) . \quad (3.24)$$

Nessas equações, entenda-se \sum_λ como o somatório nos índices usados para enumerar os autovalores; assim, esse somatório pode ser simples (no caso de λ_n), duplo (no caso de λ_{mn}) ou triplo (no caso de três índices: λ_{lmn}). Quanto ao termo marcado com *, só ocorrerá quando existir o autovalor $\lambda_0 = 0$.

Analisando a estrutura dessas soluções, concluímos que, qualquer que seja o problema de calor ou onda, a forma da parte temporal é sempre a que se apresenta acima (somente os autovalores de λ mudam). Por outro lado, o cálculo da parte espacial, definida pelas autofunções, é elaborado: trata-se de resolver a equação (homogênea) de Helmholtz sob condições de fronteira homogêneas, um problema de autovalor que depende do número de dimensões e da geometria do problema.

Aplicamos o exposto acima no exemplo seguinte.

—— **Exemplo 3.2.1.** Vamos resolver as equações do calor e da onda, dadas pelas equações (3.17) e (3.18), na região V paralelepipedal formada pelos pontos $(x, y, z) \in (0, \ell) \times (0, h) \times (0, s)$, sabendo que $T = 0$ e $u = 0$ na fronteira ∂V e que, no instante inicial $t = 0$, são conhecidos $T = T_0(\vec{r})$, bem como $u = u_0(\vec{r})$ e $\partial u / \partial t = v_0(\vec{r})$.

Esses dois problemas – calor e onda –, tendo as mesmas condições de fronteira – T e u se anulam na fronteira –, para serem solucionados, passam pela resolução do mesmo problema: da equação de Helmholtz (oriunda da separação espaço-temporal) sob as condições de fronteira comum aos dois:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(\vec{r}) = 0 , & \vec{r} \in V \\ \psi(\vec{r}) = 0 & \text{se } \vec{r} \in \partial V . \end{cases}$$

Resolvemos este problema de autovalor tridimensional por separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) XYZ + \lambda XYZ &= X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \lambda XYZ = 0 \\ \xRightarrow{\div XYZ} \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\beta} + \lambda &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu + \nu + \beta \quad \text{e} \quad \begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0 \\ Y'' + \nu Y(y) = 0 \\ Z'' + \beta Z(z) = 0 . \end{cases} \end{aligned}$$

Cada uma dessas três EDOs deve ser resolvida sob as condições de fronteiras que herdaram das condições de fronteira do problema de calor ou onda original, que são deduzidas de modo análogo ao empregado na obtenção daquelas em (3.8) e (3.8); no caso, as condições de fronteira são

$$X(x_0) = 0 \text{ se } x_0 = 0 \text{ ou } \ell , \quad Y(y_0) = 0 \text{ se } y_0 = 0 \text{ ou } h , \quad Z(z_0) = 0 \text{ se } z_0 = 0 \text{ ou } s .$$

Então percebemos que as partes X , Y e Z que compõem ψ devem ser autofunções de problemas de autovalor unidimensionais, sendo, no caso, todos os três do mesmo tipo do Prob. (i) resolvido na seção 2.3; assim,

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0 , & x \in (0, \ell) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mu_l = (m\pi/\ell)^2 & (l = 1, 2, \dots) \\ X_l(x) = \sin(l\pi x/\ell) \end{cases} \\ \begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0 , & y \in (0, h) \\ Y(0) = Y(h) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \nu_m = (n\pi/h)^2 & (m = 1, 2, \dots) \\ Y_m(y) = \sin(m\pi y/h) \end{cases} \\ \begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0 , & z \in (0, s) \\ Z(0) = Z(s) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \beta_n = (n\pi/s)^2 & (n = 1, 2, \dots) \\ Z_n(z) = \sin(n\pi z/s) . \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, os autovalores e as autofunções do problema na equação (3.5) são

$$\lambda_{lmn} = \left(\frac{l\pi}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{s}\right)^2 \xrightarrow{l,m,n=1,2,\dots} \psi_{lmn}(x,y,z) = \sin \frac{l\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} . \quad (3.25)$$

Usando as equações (3.23) e (3.24) [em que o somatório deve ser triplo, realizado nos três índices l , m e n , para somar todos os termos associados a todos os autovalores], podemos escrever as soluções gerais

$$T(x,y,z,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{lmn} e^{-\lambda_{lmn} \alpha t} \sin \frac{l\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} \quad (3.26)$$

do problema de calor e

$$u(x,y,z,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{lmn} \cos \omega_{lmn} t + B_{lmn} \sin \omega_{lmn} t) \sin \frac{l\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} \quad (3.27)$$

do problema de onda, onde $\omega_{lmn} = c \sqrt{\lambda_{lmn}}$, com o λ_{lmn} dado em (3.25).

As constantes na solução geral são determinadas impondo-se as condições iniciais:

$$T(x,y,z,0) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{lmn} \sin \frac{l\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} = T_0(x,y,z) ,$$

$$u(x,y,z,0) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{lmn} \sin \frac{l\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} = u_0(x,y,z) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{lmn} B_{lmn} \sin \frac{l\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} = v_0(x,y,z) .$$

Os coeficientes dessas séries triplas de Fourier em senos são calculados de acordo com a seção 2.5; já substituindo os conhecidos valores das normas quadráticas envolvidas, temos que

$$D_{lmn} = \frac{8}{\ell h s} \int_0^s \int_0^h \int_0^\ell T_0(x,y,z) \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} \sin \frac{l\pi x}{\ell} dx dy dz , \quad (3.28)$$

$$A_{lmn} = \frac{8}{\ell h s} \int_0^s \int_0^h \int_0^\ell u_0(x,y,z) \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} \sin \frac{l\pi x}{\ell} dx dy dz , \quad (3.29)$$

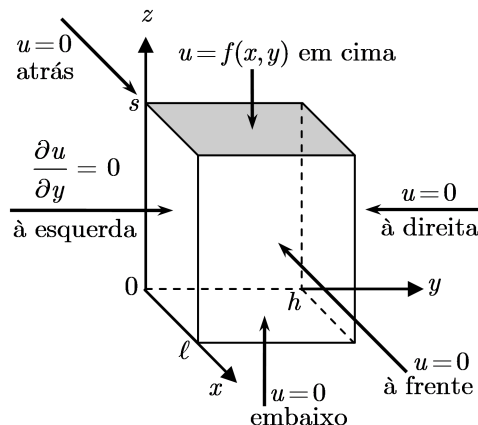
$$\omega_{lmn} B_{lmn} = \frac{8}{\ell h s} \int_0^s \int_0^h \int_0^\ell v_0(x,y,z) \sin \frac{m\pi y}{h} \sin \frac{n\pi z}{s} \sin \frac{l\pi x}{\ell} dx dy dz . \quad (3.30)$$

As soluções dos problemas de calor e onda são formadas pelas expressões quadriculadas nas equações (3.25) a (3.30).

3.3 Equação de Laplace em Três Coordenadas Cartesianas

O estudo desta seção deve ser precedido da leitura, na Apostila de Cálculo 4, do preâmbulo da seção 6.4 bem como de uma revisão das resoluções da equação de Laplace apresentadas nas seções 6.4.1 e 6.4.2.1. Aqui apenas complementamos essa categoria de problemas acrescentando um cálculo tridimensional.

— **Exemplo 3.3.1.** Cálculo da solução da equação de Laplace no paralelepípedo da figura sob as condições de fronteira indicadas.



A formulação desse problema é a seguinte:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y,z) = 0 , & (x,y,z) \in (0,\ell) \times (0,h) \times (0,s) \\ u(0,y,z) = u(\ell,y,z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0,z) = u(x,h,z) = 0 \\ u(x,y,0) = 0 , \quad u(x,y,s) = f(x,y) \end{cases}$$

Realizando a separação de variáveis

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) , \quad (3.31)$$

obtemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)XYZ = X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\xRightarrow{\div XYZ} \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \frac{Z''}{Z} = 0. \quad (3.32)$$

Explicuemos a separação realizada acima. As condições de fronteira *homogêneas* nas faces em $x = 0$ e $x = \ell$ bem com em $y = 0$ e $y = h$ revelam que as partes X e Y serão provenientes de problemas de autovalor. Daí haveremos separado os dois primeiros termos acima usando as constantes *independentes* (cujos autovalores resultarão de problemas *independentes*) $-\mu$ e $-\nu$.

Nota – *Padronização da forma da equação diferencial de um problema de autovalor:*

Os sinais negativos nas constantes de separação $-\mu$ e $-\nu$ em (3.31) estão de acordo com a convenção comumente adotada de sempre se escrever a equação diferencial de um problema de autovalor na forma da equação de Sturm-Liouville (2.24), na qual o sinal "+" precede a constante λ .

Obtemos para X e Y respectivamente os problemas de autovalor já resolvidos nos Probs. (i) e (iv) da seção 2.3; logo,

$$\begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0, & x \in (0, \ell) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\ell)^2 & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ X_m(x) = \sin(m\pi x/\ell), \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, h) \\ Y'(0) = Y(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/h)^2 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ Y_n(y) = \cos(n\pi y/2h). \end{cases}$$

Para determinar a parte Z de u , resolvemos a EDO $Z'' - (\mu + \nu)Z(z) = 0$ que se obtém com a separação do terceiro termo em (3.32), mas com μ e ν substituídos respectivamente pelos autovalores μ_m e ν_n acima, sob a condição de fronteira homogênea que Z herda daquela que u satisfaz na face em $z = 0$. Esse problema é formulado e resolvido a seguir:

$$Z''_{mn} - (\mu_m + \nu_n)Z_{mn}(z) = 0, \quad z \in (0, s), \quad Z_{mn}(0) = 0.$$

$$\therefore Z_{mn}(z) = A_{mn} \cosh(\kappa_{mn}z) + B_{mn} \sinh(\kappa_{mn}z), \quad \text{onde } \boxed{\kappa_{mn} \equiv \sqrt{\mu_m + \nu_n}}. \quad (3.33)$$

$$Z_{mn}(0) = A_{mn} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{mn}(z) = B_{mn} \sinh(\kappa_{mn}z).$$

Logo, em vista de (3.31), a solução geral é a combinação linear de todas as soluções $u_{mn}(x, y, z) = X_m(x)Y_n(y)Z_{mn}(z)$, ou seja

$$\boxed{u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} B_{mn} \sinh(\kappa_{mn}z) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h}}. \quad (3.34)$$

Nesta, os coeficientes são determinados impondo a condição de fronteira não homogênea na face superior do paralelepípedo:

$$u(x, y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} [B_{mn} \sinh(\kappa_{mn}s)] \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h},$$

donde concluímos que o termo entre colchetes são os coeficientes dessa série dupla de Fourier generalizada, que podem ser calculados segundo a seção 2.5; já substituindo os valores das normas quadráticas fornecidos nessa seção, obtemos

$$\boxed{B_{mn} \sinh(\kappa_{mn}s) = \frac{4}{\ell h} \int_0^h \int_0^\ell f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h}}. \quad (3.35)$$

As soluções dos problemas de calor e onda são formadas pelas expressões quadriculadas nas equações (3.33) a (3.35).

Nota – *Fronteira isolada termicamente:*

A resolução da equação de Laplace $\nabla^2 u(\vec{r}) = 0$ pode ser interpretada como o cálculo da temperatura estacionária $T(\vec{r})$ (a temperatura independente do tempo que se estabelece num sistema em equilíbrio térmico). Admita, então, essa interpretação para o problema que acabamos de resolver: u é a temperatura estacionária T . A condição de fronteira $T = 0$ numa face do paralelepípedo é simples de entender: ela é mantida em 0° . Mas como entender a condição $\partial T / \partial y = 0$ naquela face à esquerda?

O *fluxo de calor* é uma grandeza vetorial, denotada por $\vec{q}(\vec{r})$, que expressa a condução de calor no ponto \vec{r} na direção de \vec{q} . Pela lei de Fourier, ela é dada por $\vec{q}(\vec{r}) = -\nabla T(\vec{r})$, onde k é a condutividade térmica do meio. Nas coordenadas cartesianas, temos que

$$\vec{q}(x, y, z) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Rightarrow \text{componentes de } \vec{q}: \quad q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Assim, no problema acima, a condição de fronteira

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, z) = 0$$

indica que $q_y = 0$ na face situada na ordenada $y = 0$; que o vetor \vec{q} é paralelo a essa face; que, em qualquer ponto dela, a corrente de calor é tangencial; que, portanto, não há passagem de calor através dela. Ora, isso significa que essa face é isolada termicamente.

Outro exemplo: a condição $\frac{\partial T}{\partial x}(\ell, y, z) = 0$ expressa que a face situada na abscissa $x = \ell$ (perpendicular ao eixo x , obviamente) é isolada termicamente.

3.4 O Núcleo de Poisson para a Solução da Equação de Laplace num Disco

No Exemplo 6.8 da Apostila de Cálculo 4, foi resolvida a equação de Laplace nas coordenadas polares r e θ , $\nabla^2 u(r, \theta)$, no disco de raio b centrado na origem sob a condição de fronteira $u(b, \theta) = f(\theta)$, obtendo a seguinte solução [v. lá as equações (6.44) e (6.45)]:

$$u(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

onde os coeficientes são dados por

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi b^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{e} \quad B_n = \frac{1}{\pi b^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Embora a resolução já esteja concluída, ela pode ser expressa sem a série infinita. Conseguimos isso substituindo essas fórmulas dos coeficientes C_0 , A_n e B_n na expressão da solução $u(r, \theta)$ acima:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{\cos n\theta}{\pi b^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi + \frac{\sin n\theta}{\pi b^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi \right],$$

em que, antes de substituir, trocamos a letra que denota a variável de integração de θ para ϕ , para que, no passo que realizaremos em seguida, possamos introduzir os termos $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$ [inicialmente presentes na expressão da solução $u(r, \theta)$ nas integrais. Fazendo isso e admitindo que o somatório de integrais é a integral do somatório, obtemos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b} \right)^n [\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi] \right\} f(\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b} \right)^n \cos n(\phi - \theta) \right\} f(\phi) d\phi. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Definindo

$$z \equiv \frac{r}{b} e^{i(\phi - \varphi)} = \frac{r}{b} [\cos(\phi - \varphi) + i \sin(\phi - \varphi)],$$

donde

$$z^n = \left(\frac{r}{b} \right)^n e^{in(\phi - \varphi)} = \left(\frac{r}{b} \right)^n [\cos n(\phi - \varphi) + i \sin n(\phi - \varphi)],$$

podemos desenvolver o termo entre chaves em (3.36) como segue^(*):

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b} \right)^n \cos n(\phi - \theta) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z^n = \operatorname{Re} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 1 + 2 \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -1 + 2 \frac{1}{1 - z} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + z}{1 - z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + z}{1 - z} \frac{(1 - z)^*}{(1 - z)^*} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1 + z)(1 - z^*)}{|1 - z|^2} \right\} \end{aligned}$$

(*) Usamos os seguintes resultados

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{se } |z| < 1 \quad \text{série geométrica} \quad \text{e} \quad z - z^* = 2i \operatorname{Im} z.$$

Note que, de fato, $|z| = r/b < 1$ no interior do disco.

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \frac{1 + (z - z^*) - |z|^2}{| [1 - (r/b) \cos(\phi - \theta)] - i(r/b) \sin(\phi - \theta) |^2} \\
&= \operatorname{Re} \frac{1 + 2i \operatorname{Im} z - (r/b)^2}{[1 - (r/b) \cos(\phi - \theta)]^2 + [(r/b) \sin(\phi - \theta)]^2} \\
&= \frac{1 - (r/b)^2}{1 - 2(r/b) \cos(\phi - \theta) + (r/b)^2} = \frac{b^2 - r^2}{b^2 - 2br \cos(\phi - \theta) + r^2} ,
\end{aligned}$$

resultado conhecido como núcleo de Poisson. Substituindo-o em (3.36), obtemos a solução do problema na forma da chamada integral de Poisson :

$$u(r, \theta) = \frac{b^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{b^2 - 2br \cos(\phi - \theta) + r^2} . \quad (3.37)$$

3.5 Problemas Não Homogêneos de Calor e Onda

Num problema não homogêneo de calor ou onda, a equação, a condição de fronteira ou ambas não são homogêneas (ignoram-se as condições iniciais, geralmente não homogêneas, nessa terminologia). Desde Cálculo 4 ainda não tratamos de tais problemas *dependentes do tempo* que não sejam homogêneos (ressalte-se que os cálculos de temperatura estacionária – que consistem em resolver a equação de Laplace – sob condições de fronteira não homogêneas que já resolvemos não envolvem a variável temporal).

Seguem técnicas simples para tratar de problemas simples, aqui apresentadas tão somente para resolver problemas *unidimensionais* de calor (numa barra) e onda (numa corda). Os exemplos seguem em ordem gradativa de complexidade:

—— **Exemplo 3.5.1.** Extremos da barra à mesma temperatura constante:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = 0 \\ x \in (0, \ell) , \quad t > 0 \\ T(0, t) = T(\ell, t) = T_1 = \text{const.} \\ T(x, 0) = T_0(x) . \end{cases}$$

Este problema não pode ser resolvido diretamente por separação de variáveis.

Definimos $T(x, t) \equiv u(x, t) + T_1$, obtendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 \\ x \in (0, \ell) , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = T_0(x) - T_1 . \end{cases}$$

Este é um problema homogêneo, que já foi resolvido por separação de variáveis.

—— **Exemplo 3.5.2.** Extremos da barra sob diferentes temperaturas constantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = 0 , \quad x \in (0, \ell) , \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_1 = \text{const.} , \quad T(\ell, t) = T_2 = \text{const.} , \quad T(x, 0) = T_0(x) . \end{cases}$$

Definimos $T(x, t) \equiv u(x, t) + \eta(x)$, obtendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta''(x) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 , \quad x \in (0, \ell) , \quad t > 0 \\ T(0, t) = u(0, t) + \eta(0) = T_1 \\ T(\ell, t) = u(\ell, t) + \eta(\ell) = T_2 \\ T(x, 0) = u(x, 0) + \eta(x) = T_0(x) . \end{cases}$$

Para obter um problema homogêneo para $u(x, t)$, devemos escolher

$$\eta''(x) = 0 , \quad \eta(0) = T_1 \quad \text{e} \quad \eta(\ell) = T_2 ,$$

assim obtendo para $\eta(x)$ um problema (formado por uma EDO de 2ª ordem e duas condições de fronteira) que é bem definido, isto é, que tem uma única solução, dada por $\eta(x) = (T_2 - T_1)x/\ell + T_1$, cuja substituição no problema de calor acima leva ao seguinte problema, que já sabemos resolver:

$$\star \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 , \quad x \in (0, \ell) , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = T_0(x) - \eta(x) . \end{cases}$$

—— **Exemplo 3.5.3.** Barra com extremos sob temperaturas constantes, de condutividade térmica k [W/m°C] e na qual a densidade de potência é dada pela função $Q(x)$ [W/m³]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = -\frac{Q(x)}{k}, & x \in (0, \ell), \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_1 = \text{const.}, \quad T(\ell, t) = T_2 = \text{const.}, \quad T(x, 0) = T_0(x). \end{cases}$$

Definimos $T(x, t) \equiv u(x, t) + \eta(x)$, obtendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta''(x) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{Q(x)}{k}, & x \in (0, \ell), \quad t > 0 \\ T(0, t) = u(0, t) + \eta(0) = T_1 \\ T(\ell, t) = u(\ell, t) + \eta(\ell) = T_2 \\ T(x, 0) = u(x, 0) + \eta(x) = T_0(x). \end{cases}$$

Ao escolher

$$\eta''(x) = -Q(x)/k, \quad \eta(0) = T_1 \quad \text{e} \quad \eta(\ell) = T_2,$$

formamos para $\eta(x)$ um problema bem definido, cuja solução, ao ser substituída no problema de calor acima, leva ao mesmo problema homogêneo para $u(x, t)$ em ★, obtido no Exemplo 3.5.2, mas com uma solução $\eta(x)$ diferente, evidentemente.

—— **Exemplo 3.5.4.** Corda esticada com tensão T [N/m] e submetida à carga $f(x)$ vibrando entre extremos fixos a diferentes alturas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{f(x)}{T}, & x \in (0, \ell), \quad t > 0 \\ y(0, t) = y_1 = \text{const.}, \quad y(\ell, t) = y_2 = \text{const.} \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Definimos $y(x, t) \equiv u(x, t) + \eta(x)$, obtendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta''(x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(x)}{T}, & x \in (0, \ell), \quad t > 0 \\ y(0, t) = u(0, t) + \eta(0) = y_1 \\ u(\ell, t) = u(\ell, t) + \eta(\ell) = y_2 \\ y(x, 0) = u(x, 0) + \eta(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + \eta(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Ao escolher

$$\eta''(x) = -f(x)/T, \quad \eta(0) = y_1 \quad \text{e} \quad \eta(\ell) = y_2,$$

formamos para $\eta(x)$ um problema bem definido, cuja solução, ao ser substituída no problema de onda acima, leva ao seguinte problema homogêneo, que já sabemos resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & x \in (0, \ell), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = y_0(x) - \eta(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) - \eta'(x). \end{cases}$$

Por fim, ressalve-se que as técnicas de homogeneização expostas também se aplicam no caso das outras condições de fronteira consideradas.

3.6 Exercícios

3.6.1 Enunciados

1] Resolva o seguinte problema de calor:

$$\begin{cases} \nabla^2 T(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & (x, y) \in (0, \ell) \times (0, h) \\ T(0, y, t) = T(\ell, y, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = T(x, h, t) = 0 \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y). \end{cases}$$

2] Resolva o seguinte problema de membrana vibrante:

$$\begin{cases} \nabla^2 z(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, & (x, y) \in (0, \ell) \times (0, h) \\ z(0, y, t) = \frac{\partial z}{\partial x}(\ell, y, t) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, h, t) = 0 \\ z(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y). \end{cases}$$

3] Resolva o seguinte problema de calor:

$$\begin{cases} \nabla^2 T(x, y, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, & (x, y, z) \in (0, \ell) \times (0, h) \times (0, s) \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\ell, y, z, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, z, t) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, h, z, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, 0, t) = \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, s, t) = 0 \\ T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z). \end{cases}$$

4] Resolva o seguinte problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in (0, \ell) \times (0, \infty) \times (0, s) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, y, z) = 0 \\ u(x, 0, z) = f(x, z) \\ u(x, y, 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, s) = 0. \end{cases}$$

5] Considere uma barra reta situada entre $x = 0$ e $x = 10$ cm, de difusividade térmica $\alpha = 1$ cm²/s e condutividade térmica $k = 1$ W/m°C, em que há uma geração de calor constante de 2 W/cm³. Calcule a temperatura $T(x, t)$ na barra sabendo que seus extremos esquerdo e direito são mantidos em 20°C e 10°C, respectivamente, e que, $T(x, 0) = 9x - x^2$ [°C].

3.6.2 Soluções

1

$$T(x, y, t) \equiv \psi(x, y)\tau(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} \equiv -\lambda \text{ (constante)}.$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda \psi(x, y) = 0 \\ \psi \text{ sob as mesmas condições de fronteira que } T. \end{cases}$$

$$\psi(x, y) \equiv X(x)Y(y) \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \lambda = 0.$$

$$\begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0, & x \in (0, \ell) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\ell)^2 & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ X_n(x) = \text{sen}(m\pi x/\ell). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, h) \\ Y'(0) = Y(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/2h)^2 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ Y_n(y) = \cos(n\pi y/2h). \end{cases}$$

$$\tau'_{mn} + \lambda_{mn}\alpha\tau_{mn}(t) = 0 \quad [\lambda_{mn} = \mu_m + \nu_n] \Rightarrow \tau_{mn}(t) = e^{-\lambda_{mn}\alpha t}.$$

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} C_{mn} e^{-\lambda_{mn}\alpha t} \text{sen} \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h}.$$

$$T(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} C_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h} = T_0(x, y).$$

$$C_{mn} = \frac{\int_0^h \int_0^\ell T_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{2h} dx dy}{\underbrace{\int_0^\ell \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx}_{\ell/2} \underbrace{\int_0^h \cos^2 \frac{n\pi y}{2h} dy}_{h/2}} .$$

2

$$z(x, y, t) \equiv \psi(x, y)\tau(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''}{\tau} \equiv -\lambda \text{ (constante)} .$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda \psi(x, y) = 0 \\ \psi \text{ sob as mesmas condições de fronteira que } z . \end{cases}$$

$$\psi(x, y) \equiv X(x)Y(y) \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \lambda = 0 .$$

$$\begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0, & x \in (0, \ell) \\ X(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/2\ell)^2 \quad (m = 1, 3, 5 \dots) \\ X_n(x) = \sin(m\pi x/2\ell) . \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, h) \\ Y'(0) = Y'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/h)^2 \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \\ Y_n(y) = \cos(n\pi y/h) . \end{cases}$$

$$\tau''_{mn} + \lambda_{mn} c^2 \tau_{mn}(t) = 0 \quad [\lambda_{mn} = \mu_m + \nu_n] .$$

$$\tau_{mn}(t) = A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t \quad [\omega_{mn} \equiv c \sqrt{\lambda_{mn}}] .$$

$$z(x, y, 0) = \psi(x, y)\tau(0) = 0 \Rightarrow \tau(0) = 0 \Rightarrow \tau_{mn}(0) = A_{mn} = 0 \Rightarrow \tau_{mn}(t) = B_{mn} \sin \omega_{mn} t .$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \sin \omega_{mn} t \sin \frac{m\pi x}{2\ell} \cos \frac{n\pi y}{h} .$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2\ell} \cos \frac{n\pi y}{h} = v_0(x, y) .$$

$$\omega_{mn} B_{mn} = \frac{\int_0^h \int_0^\ell v_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{2\ell} \cos \frac{n\pi y}{h} dx dy}{\underbrace{\int_0^\ell \sin^2 \frac{m\pi x}{2\ell} dx}_{\ell/2} \underbrace{\int_0^h \cos^2 \frac{n\pi y}{h} dy}_{\begin{cases} h/2 \text{ se } n \neq 0 \\ h \text{ se } n = 0 \end{cases}}} .$$

3

$$T(x, y, z, t) \equiv \psi(x, y, z)\tau(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} \equiv -\lambda \text{ (constante)} .$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \lambda \psi(x, y, z) = 0 \\ \psi \text{ sob as mesmas condições de fronteira que } T . \end{cases}$$

$$\psi(x, y, z) \equiv X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\beta} + \lambda = 0 .$$

$$\begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0, & x \in (0, \ell) \\ X'(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\ell)^2 \quad (m = 0, 1, 2 \dots) \\ X_m(x) = \cos(m\pi x/\ell) . \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, h) \\ Y'(0) = Y'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/h)^2 \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \\ Y_n(y) = \cos(n\pi y/h) . \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0, & z \in (0, s) \\ Z'(0) = Z'(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_j = (j\pi/h)^2 \quad (j = 0, 1, 2 \dots) \\ Z_j(z) = \cos(j\pi z/s) . \end{cases}$$

$$\tau'_{mnj} + \lambda_{mnj} \alpha \tau_{mnj}(t) = 0 \quad [\lambda_{mnj} = \mu_m + \nu_n + \beta_j] \Rightarrow \tau_{mnj}(t) = e^{-\lambda_{mnj} \alpha t} .$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{mnj} e^{-\lambda_{mnj} \alpha t} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{h} \cos \frac{j\pi z}{s} .$$

$$T(x, y, z, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{mnj} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{h} \cos \frac{j\pi z}{s} = T_0(x, y, z) .$$

$$C_{mnj} = \frac{\int_0^s \int_0^h \int_0^\ell T_0(x, y, z) \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{h} \cos \frac{j\pi z}{s} dx dy dz}{\underbrace{\int_0^\ell \cos^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx}_{\begin{cases} \ell/2 & \text{se } m \neq 0 \\ \ell & \text{se } m = 0 \end{cases}}} \underbrace{\int_0^h \cos^2 \frac{n\pi y}{h} dy}_{\begin{cases} h/2 & \text{se } n \neq 0 \\ h & \text{se } n = 0 \end{cases}} \underbrace{\int_0^s \cos^2 \frac{j\pi z}{s} dz}_{\begin{cases} s/2 & \text{se } j \neq 0 \\ s & \text{se } j = 0 \end{cases}} .$$

Nota:

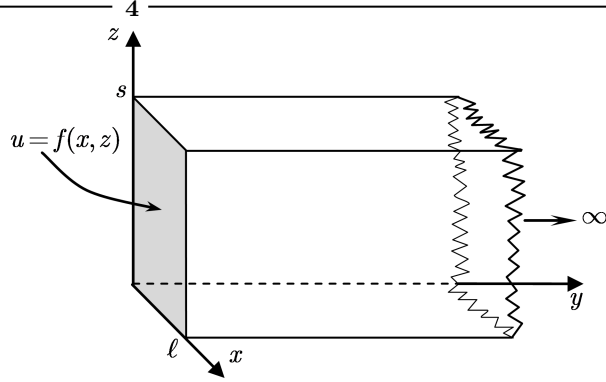
Uma vez que $\lambda_{000} = 0$, então, denotando pela mesma letra V tanto a região $(x, y, z) \in (0, \ell) \times (0, h) \times (0, s)$ quanto o volume $V = \ell h s$ dessa região, temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= C_{000} + \underbrace{\sum_m \sum_n \sum_j}_{m \neq 0, n \neq 0, j \neq 0} e^{-\lambda_{mnj} \alpha t} \psi_{mnj}(x, y, z) . \\ T(x, y, z, t \rightarrow \infty) &= C_{000} = \frac{\int_0^s \int_0^h \int_0^\ell T_0(x, y, z) dx dy dz}{\ell h s} \\ &= \frac{1}{V} \int_V T_0(\vec{r}) dV : \text{média da temperatura inicial em } V. \end{aligned}$$

Esse é o resultado assintótico no tempo que se espera nessa região V de fronteiras isoladas termicamente: que toda a energia térmica inicial tenda a se distribuir uniformemente na região V .

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0$$

$$u \Big|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$



$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \frac{Y''}{Y} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\nu} = 0$$

$$\begin{cases} X'' + \mu X(x) = 0, & x \in (0, \ell) \\ X'(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\ell)^2 & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ X_m(x) = \cos(m\pi x/\ell) . \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z'' + \nu Z(y) = 0, & z \in (0, s) \\ Z(0) = Z'(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/2s)^2 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ Z_n(y) = \text{sen}(n\pi z/2s) . \end{cases}$$

$$Y''_{mn} - \underbrace{(\mu_m + \nu_n)}_{\equiv \kappa_{mn}^2} Y_{mn}(y) = 0 \Rightarrow Y_{mn}(y) = A_{mn} e^{-\kappa_{mn} y} + B_{mn} e^{\kappa_{mn} y} \quad (\kappa_{mn} \equiv \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}) .$$

$$Y_{mn}(y \rightarrow \infty) \text{ finito} \Rightarrow B_{mn} = 0 \Rightarrow Y_{mn}(y) = A_{mn} e^{-\kappa_{mn} y} .$$

$$u(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{mn} e^{-\kappa_{mn} y} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \text{sen} \frac{n\pi z}{2s} .$$

$$u(x, 0, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \text{sen} \frac{n\pi z}{2s} = f(x, z) .$$

$$A_{mn} = \frac{\int_0^s \int_0^\ell f(x, z) \cos \frac{m\pi x}{\ell} \text{sen} \frac{n\pi z}{2s} dx dz}{\underbrace{\int_0^\ell \cos^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx}_{\begin{cases} \ell/2 & \text{se } m \neq 0 \\ \ell & \text{se } m = 0 \end{cases}}} \underbrace{\int_0^s \text{sen}^2 \frac{n\pi z}{2s} dz}_{s/2} .$$

Equação do calor não homogênea: $T_{xx} - \frac{1}{\alpha} T_t = \frac{-Q(x,t)}{k} \xrightarrow{\alpha=k=1, Q(x,t)=2} T_{xx} - T_t = -2.$

$$\begin{cases} T_{xx} - T_t = -2, & x \in (0, 1), t > 0 \\ T(0, t) = 20, & T(10, t) = 0 \\ T(x, 0) = 9x - x^2. \end{cases}$$

$$T(x, t) \equiv u(x, t) + \eta(x)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + \eta''(x) - u_t &= -2 & \Rightarrow & \eta''(x) = -2 \\ T(0, t) = u(0, t) + \eta(0) &= 20 & \Rightarrow & \eta(0) = 20 \\ T(10, t) = u(10, t) + \eta(10) &= 10 & \Rightarrow & \eta(10) = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta(x) = -x^2 + 9x + 20.$$

$$T(x, 0) = u(x, 0) + \eta(x) = 9x - x^2 \Rightarrow u(x, 0) = 9x - x^2 - \eta(x) \Rightarrow u(x, 0) = -20.$$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = u(10, t) = 0 \\ u(x, 0) = -20. \end{cases}$$

A solução $u(x, t)$ deste problema homogêneo pode ser calculada por separação de variáveis (omitimos os detalhes, já conhecidos):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(n\pi/10)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10}.$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10} = -20.$$

$$B_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} (-20) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10} dx = \frac{4(10)}{n\pi} \cos n\pi \Big|_0^{10} = \frac{40}{n\pi} (\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - 1) = \frac{40}{n\pi} \cdot \begin{cases} -2 & \text{se } n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & \text{se } n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-80}{n\pi} e^{-(n\pi/10)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10}.$$

$$T(x, t) = \eta(x) + u(x, t) = -x^2 + 9x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-80}{n\pi} e^{-(n\pi/10)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10} \blacksquare$$

Capítulo 4

Método de Frobenius e Funções Especiais

- Ref. [4], seq. 5.1 a 5.6
- Ref. [7, seq. 6.2 a 6.5] e Ref. [8, Ap. I]
- Ref. [6], cap. 4, 6 e 7

4.1 Método de Frobenius

Pré-requisito ao estudo do método exposto nesta seção é o Cap. 2 da apostila de Cálculo 4, à qual fazemos referência usando a abreviatura Ap-Calcul4.

4.1.1 Parte 1 (Frobenius I)

Os pontos singulares de uma EDO, já definidos e explicados na seção 2.1 da Ap-Calcul4, são, por sua vez, classificados em regulares e irregulares como segue: Dizemos que um ponto singular da EDO

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = 0 \quad (4.1)$$

é um ponto singular regular (ou uma singularidade regular) se, ao reescrevermos essa EDO na forma dada por

$$y'' + p(x)y' + q(x)y(x) = 0 \quad , \quad (4.2)$$

[obtida dividindo (4.1) por $A(x)$] constatamos que $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2q(x)$ ou suas extensões contínuas são funções analíticas em x_0 .

O ponto singular que não é regular é chamado de ponto singular irregular (ou singularidade irregular).

Novamente, para evitar a análise de analiticidade de funções, fornece-se a seguinte receita, válida no caso de EDO cujos coeficientes são polinômios:

Considere (4.1) com coeficientes polinomiais, e escreva essa EDO como em (4.2), mas com $p(x)$ e $q(x)$ na forma de um quociente irredutível de polinômios completamente fatorados em monômios. Se o fator $(x - x_0)$ aparece nos denominadores de $p(x)$ e $q(x)$ com multiplicidades m_p e m_q , respectivamente, então $x = x_0$ é um ponto singular

- *regular* se $m_p \leq 1$ e $m_q \leq 2$
- *irregular* se $m_p > 1$ ou $m_q > 2$

Assim, por exemplo:

i) Os pontos $x = 1$ e $x = \pm 2$ são pontos singulares da EDO $(x - 1)(x^2 - 4)^2y'' + (x - 1)(x - 2)y' + y = 0$ (sem fator comum nos coeficientes polinomiais). Reescrevendo essa equação na forma

$$y'' + \frac{1}{(x + 2)^2(x - 2)}y' + \frac{1}{(x - 1)(x + 2)^2(x - 2)^2}y = 0 \quad ,$$

verificamos, de acordo com a receita acima, que $x = -2$ é um ponto singular *irregular*; já $x = 1$ e $x = 2$ são pontos singulares *regulares*.

ii) A EDO $x^2(x + 1)^2y'' + (x^2 - 1)y' + 2y(x) = 0$, ou

$$y'' + \frac{x - 1}{x^2(x + 1)}y' + \frac{2}{x^2(x + 1)^2}y = 0 \quad ,$$

tem, em $x = 0$, um ponto singular *irregular* e, em $x = -1$, um ponto singular *regular*.

$$\text{iii) } \underbrace{(1-x^2)}_{(x+1)(x-1)} y'' - 2xy' + 30y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ são pontos singulares } \textit{regulares}.$$

$$\text{iv) } x^3 y'' - 2xy' + 5y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{2}{x^2} y' + \frac{5}{x^3} y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é ponto singular } \textit{irregular}.$$

v) $8xy'' - 2x^2 y' + 5xy = 0$, ou (cancelando o fator comum x) $8y'' - 2xy' + 5y = 0 \Rightarrow$ a EDO não tem ponto singular (somente pontos ordinários).

$$\text{vi) } (x^2 + 9)y'' - 3xy' + (1-x)y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{3xy}{(x-3i)(x+3i)} y' + \frac{1-x}{(x-3i)(x+3i)} y = 0 \Rightarrow x = \pm 3i \text{ são pontos singulares } \textit{regulares}.$$

A seguir estudamos o chamado método de Frobenius, usado para se obter solução em série de EDO linear em torno de ponto singular regular. Antes de explicar esse método, convém apresentar dois fatos que motivam esse método:

- $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são soluções de $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ para $x \in (0, \infty)$. Essa EDO tem um ponto singular regular em $x = 0$, em torno do qual, se intentássemos uma série de potências $\sum a_n x^n$ como solução, só obteríamos $y_1 = x^2$, pois o fator $\ln x$ na solução y_2 não tem série de Taylor em torno de $x = 0$.
- A EDO $6x^2 y'' + 5xy' + (x^2 - 1)y = 0$ tem um ponto singular regular em $x = 0$, mas não possui solução alguma na forma da série $\sum a_n x^n$ (centrada em $x = 0$). Pelo método de Frobenius, podemos obter duas soluções em série com as formas $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}$ e $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1/3}$.

Pois bem, considere o problema de resolver a EDO (4.1), isto é,

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

em torno de um *ponto singular regular* $x = x_0$. Aqui, por questão de simplicidade, supomos sempre que $x_0 = 0^{(*)}$. Pelo chamado método de Frobenius, é sempre possível encontrar uma solução na forma da série (relativa a $x_0 = 0$)

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots, \text{ com } a_0 \neq 0. \quad (4.3)$$

Não permitindo que a_0 se anule, impomos que esse coeficiente seja o primeiro da série. Faz parte da resolução determinar:

1. Os valores de r para os quais a EDO tem solução na forma da série em (4.3). Esses valores surgem da resolução de uma equação algébrica do 2º grau (do 3º grau se a EDO fosse de 3ª ordem e assim por diante), denominada equação indicial, cujas soluções r_1 e r_2 são as chamadas raízes indiciais.
2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n .
3. O intervalo de convergência da solução em série obtida.

Os detalhes do método^(†) serão apresentados através de exemplos, nos quais $x = 0$ é o ponto singular regular em torno do qual se deseja a solução. Conforme as raízes indiciais, três casos importantes devem ser considerados (não consideraremos raízes indiciais imaginárias):

4.1.1.1 Caso de raízes indiciais que não diferem por um inteiro: $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, o método de Frobenius sempre fornece duas soluções linearmente independentes.

—— **Exemplo 4.1.1.** $3xy'' + y' - y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}$$

$$3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

(*) Isso não significa perda de generalidade, pois, mediante a mudança de variável $t = x - x_0$, sempre podemos transformar uma EDO com ponto singular regular em $x = x_0$ noutra para a qual esse ponto singular regular é dado por $t = 0$.

(†) Consulte as seções 4.3 a 4.6 da referência: Hildebrand, F. B. *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

$$\begin{aligned}
& [3(r-1)r+r]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[3(n+r-1)(n+r) + (n+r)]}_{(3n+3r-2)(n+r)} a_n - a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} = 0 \\
& \underbrace{(3r-2)r}_{0} a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(3n+3r-2)(n+r)a_n - a_{n-1}]}_0 x^{n+r-1} = 0 \\
\therefore \begin{cases} (3r-2)r = 0 \text{ (equação indicial)} & \Rightarrow r = 0 \text{ ou } 2/3 \text{ (raízes indiciais)} \\ (3n+3r-2)(n+r)a_n - a_{n-1} = 0 \text{ (relação de recorrência dependente da raiz indicial)} \end{cases}
\end{aligned}$$

As relações de recorrência específicas para cada raiz indicial são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(3n-2)} \\ \text{ou} \\ r = \frac{2}{3} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(3n+2)} \end{array} \right|_{n \geq 1}$$

A essas duas relações de recorrência correspondem duas séries distintas, nas quais a_0 permanece arbitrário:

A série correspondente a $r = 0$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0}{(1)(1)} = a_0 \\
a_2 &= \frac{a_1}{(2)(4)} = \frac{a_0}{8} \\
a_3 &= \frac{a_2}{(3)(7)} = \frac{a_0/8}{21} = \frac{a_0}{168} \\
a_4 &= \frac{a_3}{(4)(10)} = \frac{a_0/168}{40} = \frac{a_0}{6720} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\therefore y_1(x) = x^0(a_0 + \underbrace{a_1}_{\frac{a_0}{1}}x + \underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{8}}x^2 + \underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{168}}x^3 + \underbrace{a_4}_{\frac{a_0}{6720}}x^4 + \dots) = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{168} + \frac{x^4}{6720} + \dots \right) .$$

A série correspondente a $r = 2/3$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0}{(1)(5)} = \frac{a_0}{5} \\
a_2 &= \frac{a_1}{(2)(8)} = \frac{a_0/5}{16} = \frac{a_0}{80} \\
a_3 &= \frac{a_2}{(3)(11)} = \frac{a_0/80}{33} = \frac{a_0}{2640} \\
a_4 &= \frac{a_3}{(4)(14)} = \frac{a_0/2640}{56} = \frac{a_0}{147840} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore y_2(x) &= x^{2/3} \left(a_0 + \underbrace{a_1}_{\frac{a_0}{5}}x + \underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{80}}x^2 + \underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{2640}}x^3 + \underbrace{a_4}_{\frac{a_0}{147840}}x^4 + \dots \right) \\
&= a_0 x^{2/3} \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{2640} + \frac{x^4}{147840} + \dots \right) .
\end{aligned}$$

Assim, obtemos duas soluções, cuja combinação linear é a solução geral: $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ (considerando o a_0 que multiplica cada uma delas como sendo duas constantes arbitrárias independentes).

4.1.1.2 Caso de raízes indiciais iguais

Neste caso só se consegue uma única solução na forma da série em (4.3), na qual r é igual ao único valor da raiz indicial.

— **Exemplo 4.1.2.** $xy'' + y' - 4y = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} &= 0 \\ [(r-1)r+r]a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[(n+r-1)(n+r) + (n+r)]}_{(n+r)^2} a_n - 4a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} &= 0 \\ \underbrace{r^2}_0 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(n+r)^2 a_n - 4a_{n-1}]}_0 x^{n+r-1} &= 0 . \end{aligned}$$

Vemos que $r = 0$ é o único valor da raiz indicial e que

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{(r+n)^2} \text{ para } n \geq 1 . \quad (4.4)$$

Essa equação, com $r = 0$, torna-se $a_n = 4a_{n-1}/n^2$ ($n \geq 1$), donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4a_0}{1^2} \\ a_2 &= \frac{4a_1}{2^2} = \frac{4^2 a_0}{(1 \cdot 2)^2} \\ a_3 &= \frac{4a_2}{3^2} = \frac{4^3 a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{4^n a_0}{(n!)^2} \end{aligned}$$

Logo, temos no máximo uma única solução linearmente:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Big|_{r=0} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2} x^n = a_0 \left(1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \cdots \right) . \quad (4.5)$$

4.1.1.3 Caso de raízes indiciais que diferem por um inteiro positivo: $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}^*$

Nesse caso, a série em (4.3),

1. Com r_1 (a maior raiz indicial), sempre fornece uma única solução.
2. Com $r = r_2$ (a menor raiz indicial), leva a uma das seguintes ocorrências:
 - (a) Ela não fornece nenhuma solução.
 - (b) Ela fornece a solução geral (permanecendo arbitrários dois coeficientes), que inclui, portanto, a solução correspondente à maior raiz (r_1).
 - (c) Ela fornece uma única solução linearmente independente.

Disso concluímos que convém tentar obter primeiramente a solução correspondente à menor raiz indicial, pois, ocorrendo 2(b), a resolução estará concluída.

Vejamos exemplos das ocorrências de 2(a) e 2(b) [não exemplificaremos a ocorrência de 2(c)]:

— **Exemplo 4.1.3. Ocorrência de 2(a):** $xy'' + 3y' - y = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{[(r-1)r+3r]}_{r(r+2)} a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[(n+r-1)(n+r)+3(n+r)]}_{(n+r+2)(n+r)} a_n - a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} = 0$$

$$\underbrace{r(r+2)}_0 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(n+r+2)(n+r)a_n - a_{n-1}]}_0 x^{n+r-1} = 0$$

Vemos que $r = -2$ e $r = 0$ são as raízes indiciais; além disso, a relação de recorrência dependente de r é dada por

$$(n+r+2)(n+r)a_n - a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1) . \quad (4.6)$$

Se $r = -2$:

A relação de recorrência específica para $r = -2$,

$$n(n-2)a_n = a_{n-1} \quad (n \geq 1) ,$$

fornece

- com $n = 1$: $1(-1)a_1 = a_0 \Rightarrow a_1 = -a_0$
- com $n = 2$: $2(0)a_2 = a_1 \Rightarrow 0 = a_1 = -a_0$

Mas $a_0 = 0$ é contrário à nossa hipótese estipulada em (4.3). Logo, não existe série associada à raiz indicial $r = -2$. Passemos, então, ao cálculo da única solução linearmente independente associada à maior raiz indicial, que, conforme o item 1 acima, sempre existe:

Se $r = 0$:

A relação de recorrência específica para $r = 0$,

$$(n+2)na_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n+2)} \quad (n \geq 1) ,$$

fornece

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{(3)(1)} = \frac{a_0}{3} \\ a_2 &= \frac{a_1}{(4)(2)} = \frac{a_0/3}{8} = \frac{a_0}{24} \\ a_3 &= \frac{a_2}{(5)(3)} = \frac{a_0/24}{15} = \frac{a_0}{360} \\ a_4 &= \frac{a_3}{(6)(4)} = \frac{a_0/360}{24} = \frac{a_0}{8640} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos, portanto, a única solução linearmente independente:

$$y(x) = x^0 \left(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{3}}_{\frac{a_0}{3}} x + \underbrace{\frac{a_2}{24}}_{\frac{a_0}{24}} x^2 + \underbrace{\frac{a_3}{360}}_{\frac{a_0}{360}} x^3 + \underbrace{\frac{a_4}{8640}}_{\frac{a_0}{8640}} x^4 + \cdots \right) = a_0 \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \frac{x^4}{8640} + \cdots \right). \quad (4.7)$$

—— **Exemplo 4.1.4. Ocorrência de 2(b):** $x^2 y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \underbrace{[(r-1)r+r-1]}_{(r-1)(r+1)=r^2-1} a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[(n+r-1)(n+r)+n+r-1]}_{(n+r-1)(n+r+1)} a_n + (n+r-1)a_{n-1} \right\} x^{n+r} &= 0 \\ \underbrace{(r^2-1)}_0 a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ (n+r-1)(n+r+1)a_n + (n+r-1)a_{n-1} \right\}}_0 x^{n+r} &= 0 \end{aligned}$$

donde obtemos as raízes indiciais $r = \pm 1$ e também a seguinte relação de recorrência dep. de r :

$$(n + r - 1)[(n + r + 1)a_n + a_{n-1}] = 0 \quad , \quad \text{para } n \geq 1 \quad .$$

Se $r = -1$:

A relação de recorrência é $(n - 2)[na_n + a_{n-1}] = 0$ ($n \geq 1$), donde:

- Com $n = 1$, obtemos $-[a_1 + a_0] = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0$.
- Com $n = 2$, obtemos $0=0$, significando que a_2 permanece arbitrário.
- Para $n \geq 3$, temos que $a_n = -a_{n-1}/n$, ou seja:

$$a_3 = -\frac{a_2}{3}; \quad a_4 = -\frac{a_3}{4} = -\frac{-a_2/3}{4} = \frac{a_2}{12}, \quad a_5 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_2/12}{5} = -\frac{a_2}{60}, \quad \dots$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Big|_{r=-1} = x^{-1} \left[a_0 + \underbrace{a_1}_{-a_0} x + a_2 x^2 + \underbrace{a_3}_{-\frac{a_2}{3}} x^3 + \underbrace{a_4}_{\frac{a_2}{12}} x^4 + \underbrace{a_5}_{-\frac{a_2}{60}} x^5 + \dots \right] \\ &= a_0 \underbrace{x^{-1}(1-x)}_{u_1(x)} + a_2 \underbrace{x^{-1} \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} + \dots \right)}_{u_2(x)}, \end{aligned}$$

que é a solução geral da EDO, pois é a combinação linear das duas funções linearmente independentes $u_1(x)$ e $u_2(x)$ formada com as constantes arbitrárias a_0 e a_2 .

Fica como exercício mostrar que, se fizéssemos os cálculos com a maior raiz indicial, $r = 1$, obteríamos apenas a solução $u_2(x)$.

4.1.2 Parte 2 (Frobenius II)

Descrevemos aqui alguns procedimentos para o cálculo de uma segunda solução linearmente independente $y_2(x)$ quando apenas uma solução $y_1(x) \equiv a_0 u_1(x)$ de (4.1) na forma da série em (4.3) é obtida; a saber, quando as raízes indiciais r_1 e r_2 se enquadram numa das circunstâncias:

- 1ª circunstância: $r_1 = r_2$
- 2ª circunstância: $r_1 - r_2 = K \in \mathbb{N}^*$ e não existe solução na forma de (4.3) com $r = r_2$ (a menor raiz)

Procedimento 1: Fazemos uso da fórmula

$$y_2(x) = C u_1(x) \int \left[e^{-\int p(x) dx} \right] \left[\frac{1}{u_1^2(x)} \right] dx, \quad (4.8)$$

obtida pela técnica da redução de ordem^(*). Acima, $p(x)$ é o coeficiente de y' na EDO escrita na forma dada por (4.2), e C é uma constante arbitrária.

Procedimento 2: Substituímos^(†)

$$y_2(x) = a_0 u_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad (4.9)$$

na EDO para determinar os coeficientes b_n . Acima, r_2 é o único ou o menor valor da raiz indicial, conforme a circunstância.

Para exemplificar esses procedimentos, usemo-los para completar a resolução das EDOs dos Exemplos 4.1.2 e 4.1.3, obtendo uma segunda solução linearmente independente.

(*) Essa fórmula é deduzida e apresentada como a equação (4) da seção 4.2 na referência: Zill, Dennis G. e Cullen, Michael R. *Equações Diferenciais*, Terceira Edição, volume 1, Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.

(†) V. seção 4.5 da referência: Hildebrand, F. B. *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

Cálculo com o procedimento 1

Tendo em vista o uso de (4.8), expliquemos os passos necessários:

Passo 1 - Para calcular $u_1^2(x)$, usamos a fórmula $(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2bc + \dots$ (que é a soma de dois somatórios: dos quadrados de cada termo e dos dobros de cada produto de dois termos distintos). Assim, usando (4.5), que é a expressão de $u_1(x)$ obtida no exemplo 2, e considerando apenas as potências de até o 3º grau, temos que

$$u_1^2(x) = \left(1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \dots\right)^2 = 1 + 16x^2 + 8x + 8x^2 + \frac{32}{9}x^3 + 32x^3 + \dots = 1 + 8x + 24x^2 + \frac{320}{9}x^3 + \dots$$

Passo 2 - Agora devemos calcular $1/u_1^2(x)$, isto é, obter a série infinita que resulta da divisão de 1 pela série $u_1^2(x)$ computada acima. Como neste problema $u_1^2(0) = \left(x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 \Big|_{x=0} = a_0^2 \neq 0$, pois $r_1 = 0$ e $a_0 \neq 0$, podemos admitir que $1/u_1^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ou equivalentemente $u_1^2(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$, que é uma equação com a forma apropriada para determinar os desejados coeficientes c_n ; substituindo nessa equação a expressão de $u_1^2(x)$ deduzida acima, obtemos

$$u_1^2(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(1 + 8x + 24x^2 + \frac{320}{9}x^3 + \dots\right) (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots) = 1,$$

donde, mantendo explícitas apenas as potências com grau até 3, obtemos

$$\underbrace{c_0}_1 + \underbrace{(c_1 + 8c_0)}_0 x + \underbrace{(c_2 + 8c_1 + 24c_0)}_0 x^2 + \underbrace{\left(c_3 + 8c_2 + 24c_1 + \frac{320}{9}c_0\right)}_0 x^3 + \dots = 1.$$

Logo, calculando iteradamente os valores de c_n a partir das equações indicadas pelas chaves acima, obtemos:

$$c_0 = 1 \rightarrow c_1 = -8 \rightarrow c_2 = -8c_1 - 24c_0 = 40 \rightarrow c_3 = -8c_2 - 24c_1 - \frac{320}{9}c_0 = -\frac{1472}{9}.$$

Assim,

$$\frac{1}{u_1^2(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = 1 - 8x + 40x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \dots$$

Passo 3 - A EDO na forma apresentada em (4.2), isto é, $y'' + (1/x)y' - (4/x)y = 0$, mostra que $p(x) = 1/x$ e, portanto, que

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int (1/x)dx} = e^{-\ln x} = 1/x.$$

Passo 4 - Logo, usando (4.8), obtemos, finalmente.

$$\begin{aligned} y_2(x) &= C u_1(x) \int \left[e^{-\int p(x)dx} \right] \left[\frac{1}{u_1^2(x)} \right] dx = C u_1(x) \int \frac{1}{x} \left(1 - 8x + 40x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \dots \right) dx \\ &= C u_1(x) \int \left(\frac{1}{x} - 8 + 40x - \frac{1472}{9}x^2 + \dots \right) dx \\ &= C u_1(x) \left(\ln x - 8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots \right) \quad [u_1(x) \text{ dado por (4.5)}] \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.10)$$

(*) Quando $u_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com $r_1 \neq 0$, calculamos $1/u_1^2(x)$ como segue:

$$\frac{1}{u_1^2(x)} = \frac{1}{(x^{r_1})^2} \frac{1}{P^2(x)}, \quad \text{com } P(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Uma vez que $P^2(0) = a_0^2 \neq 0$, o inverso da série $P^2(x)$ pode ser calculado pelo modo já apresentando: admitimos que $1/P^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e determinamos c_n conforme explicado no Passo 2. Veja um cálculo desse tipo no problema 5(d) resolvido na seção 4.1.3.

Cálculo com o procedimento 2

Impondo uma segunda solução para a EDO $Ly = xy'' + y' - 4y = 0$ com a forma

$$y_2(x) = a_0 \underbrace{u_1(x) \ln x}_{\equiv f(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}}_{\equiv g(x)} \quad [r_2 = 0] ,$$

sendo $u_1(x)$ dado por (4.5), isto é,

$$u_1(x) = 1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \dots ,$$

obtemos

$$Ly_2 = L(a_0 f + g) = a_0 Lf + Lg = 0 \quad \Rightarrow \quad Lg = -a_0 Lf . \quad (\text{I})$$

Mas

$$\begin{aligned} Lg &= xg'' + g' - 4g = x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 4b_{n-1} x^{n-1} = b_1 - 4b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n^2 b_n - 4b_{n-1}] x^{n-1} \\ &= (b_1 - 4b_0) + (4b_2 - 4b_1)x + (9b_3 - 4b_2)x^2 + \dots \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -a_0 Lf &= -a_0 \left[xf'' + f' - 4f \right] = -a_0 \left[x \left(u_1'' \ln x + 2u_1' \frac{1}{x} + u_1 \frac{-1}{x^2} \right) + \left(u_1' \ln x + u_1 \frac{1}{x} \right) - 4u_1 \ln x \right] \\ &= -a_0 \left[(\ln x) \underbrace{(xu_1'' + u_1' - 4u_1)}_0 + 2u_1' \right] = -2a_0 \left(4 + 8x + \frac{16}{3}x^2 + \dots \right) \\ &= -8a_0 - 16a_0x - \frac{32a_0}{3}x^2 + \dots \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

Logo, em vista dos resultados em (II) e (III), a equação (I) fornece

$$\begin{aligned} b_1 - 4b_0 &= -8a_0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 4b_0 - 8a_0 \\ 4b_2 - 4b_1 &= -16a_0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = b_1 - 4a_0 = 4b_0 - 12a_0 \\ 9b_3 - 4b_2 &= -\frac{32a_0}{3} \quad \Rightarrow \quad b_3 = \frac{4}{9}b_2 - \frac{32}{27}a_0 = \frac{4}{9}(4b_0 - 12a_0) - \frac{32}{27}a_0 = \frac{16}{9}b_0 - \frac{176}{27}a_0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 u_1(x) \ln x + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots \\ &= a_0 u_1(x) \ln x \\ &\quad + b_0 + (4b_0 - 8a_0)x + (4b_0 - 12a_0)x^2 + \left(\frac{16}{9}b_0 - \frac{176}{27}a_0 \right)x^3 + \dots \quad (\text{IV}) \\ &= b_0 \underbrace{\left(1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \dots \right)}_{u_1(x)} + a_0 \left(u_1(x) \ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 + \dots \right) \\ &= b_0 u_1(x) + a_0 \underbrace{\left(u_1(x) \ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 + \dots \right)}_{\equiv u_2(x)} \quad \blacksquare \quad (4.11) \end{aligned}$$

que é, na verdade, a *solução geral*, haja vista as duas constantes arbitrárias a_0 e b_0 , bem com as duas soluções linearmente independentes $u_1(x)$, já deduzida, e $u_2(x)$, aqui obtida.

Uma segunda solução no Exemplo 4.1.3: $xy'' + 3y' - y = 0$

Cálculo com o procedimento 1

$$xy'' + 3y' - y = 0 \Rightarrow y'' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{p(x)} y' - \frac{1}{x} y = 0 \Rightarrow e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int (3/x) dx} = e^{-3 \ln x} = 1/x^3 .$$

Usando (4.7), que é a expressão de $u_1(x)$ obtida no exemplo 3, temos que

$$\begin{aligned} \therefore u_1^2(x) &= \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \dots\right)^2 \\ &= 1^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2(1)\frac{x}{3} + 2(1)\frac{x^2}{24} + 2(1)\frac{x^3}{360} + 2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{24}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{x^3}{30} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1^2(x)} &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots) \left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{x^3}{30} + \dots\right) = 1 \\ &\Rightarrow \underbrace{c_0}_1 + \underbrace{\left(c_1 + \frac{2c_0}{3}\right)}_0 x + \underbrace{\left(c_2 + \frac{2c_1}{3} + \frac{7c_0}{36}\right)}_0 x^2 + \underbrace{\left(c_3 + \frac{2c_2}{3} + \frac{7c_1}{36} + \frac{c_0}{30}\right)}_0 x^3 + \dots = 1 \\ \Rightarrow c_0 &= 1 \rightarrow c_1 = -\frac{2}{3} \rightarrow c_2 = -\frac{2c_1}{3} - \frac{7c_0}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow c_3 = -\frac{2c_2}{3} - \frac{7c_1}{36} - \frac{c_0}{30} = -\frac{19}{270} \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_1^2(x)} = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} - \frac{19}{270}x^3 + \dots . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= C u_1(x) \int \left[e^{-\int p(x) dx} \right] \left[\frac{1}{u_1^2(x)} \right] dx = C u_1(x) \int \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} - \frac{19}{270}x^3 + \dots \right) dx \\ &= C u_1(x) \int \left(x^{-3} - \frac{2x^{-2}}{3} + \frac{x^{-1}}{4} - \frac{19x}{270} + \dots \right) dx \\ &= C u_1(x) \left(-\frac{x^{-2}}{2} + \frac{2x^{-1}}{3} + \frac{1}{4} \ln x - \frac{19x}{270} + \dots \right) dx \\ &= C u_1(x) \left(\frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19x}{270} + \dots \right) \quad [u_1(x) \text{ dado por (4.7)}] \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.12)$$

Cálculo com o procedimento 2

Impondo uma segunda solução para a EDO $Ly = xy'' + 3y' - y = 0$ com a forma

$$y_2(x) = a_0 \underbrace{u_1(x) \ln x}_{\equiv f(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}}_{\equiv g(x)} \quad [r_2 = -2] ,$$

com $u_1(x)$ dado por (4.7), isto é,

$$u_1(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \dots ,$$

obtemos

$$Ly_2 = L(a_0 f + g) = a_0 Lf + Lg = 0 \Rightarrow Lg = -a_0 Lf . \quad (\text{I})$$

Mas

$$\begin{aligned} Lg &= xg'' + 3g' - g = x \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-3} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-3} = \cancel{6b_0 x^{-3}} - \cancel{6b_0 x^{-3}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[(n-2)(n-3) + 3(n-2)]}_{n(n-2)} b_n - b_{n-1} \right\} x^{n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n(n-2)b_n - b_{n-1} \right\} x^{n-3} \\ &= -\frac{b_1 + b_0}{x^2} - \frac{b_1}{x} + (3b_3 - b_2) + (8b_4 - b_3)x + \dots \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-a_0 Lf &= -a_0 \left[x f'' + 3 f' - f \right] = -a_0 \left[x \left(u_1'' \ln x + 2 u_1' \frac{1}{x} + u_1 \frac{-1}{x^2} \right) + 3 \left(u_1' \ln x + u_1 \frac{1}{x} \right) - u_1 \ln x \right] \\
&= -a_0 \left[(\ln x) \underbrace{(x u_1'' + 3 u_1' - u_1)}_0 + 2 u_1' - \frac{u_1}{x} + \frac{3 u_1}{x} = 2 u_1' + \frac{2}{x} u_1 \right] \\
&= -a_0 \left[2 \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{12} + \frac{x^2}{120} + \dots \right) + \frac{2}{x} \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \dots \right) \right] \\
&= -\frac{2a_0}{x} - \frac{4a_0}{3} - \frac{a_0 x}{4} - \frac{a_0 x^2}{45} + \dots \quad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Logo, em vista dos resultados em (II) e (III), a equação (I) fornece

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_0 &= 0 \\ -b_1 &= -2a_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = -2a_0 \\ b_1 = 2a_0 \end{cases}$$

b_2 : permanece arbitrário

$$3b_3 - b_2 = -\frac{4a_0}{3} \Rightarrow b_3 = -\frac{4a_0}{9} + \frac{b_2}{3}$$

$$8b_4 - b_3 = -\frac{a_0}{4} \Rightarrow b_4 = -\frac{a_0}{32} + \frac{b_3}{8} = -\frac{a_0}{32} - \frac{a_0}{18} + \frac{b_2}{24} = -\frac{25a_0}{288} + \frac{b_2}{24}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= a_0 u_1(x) \ln x + \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x} + b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \dots \\
&= a_0 u_1(x) \ln x \\
&\quad - \frac{2a_0}{x^2} + \frac{2a_0}{x} + b_2 + \left(-\frac{4a_0}{9} + \frac{b_2}{3} \right) x + \left(-\frac{25a_0}{288} + \frac{b_2}{24} \right) x^2 + \dots \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_2 \underbrace{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \dots \right)}_{u_1(x)} + a_0 \left(u_1(x) \ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27} x^3 + \dots \right) \\
&= b_2 u_1(x) + a_0 \left(u_1(x) \ln x - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{4x}{9} - \frac{25x^2}{288} + \dots \right) \quad \blacksquare \quad (4.14)
\end{aligned}$$

que é a *solução geral*, com as duas constantes arbitrárias a_0 e b_0 .

4.1.3 Exercícios Resolvidos

Seguem exercícios de resolução de EDOs de 2ª ordem por meio da substituição $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ (método de Frobenius), em que r_1 e r_2 denotam as raízes indiciais, sendo r_2 a menor das duas.

1] Caso em que $r_1 = r_2$: Calcule *uma solução* das EDOs:

- a) $x^2 y'' + 3xy' + (1 + 2x)y = 0$
- b) $4x^2 y'' + (1 + 4x)y = 0$

2] Caso em que $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$: Calcule *a solução geral* das EDOs:

- a) $2xy'' + y' - 6y = 0$
- b) $2x^2 y'' - xy' + (1 + x)y = 0$

3] Caso em que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, e r_2 não leva a uma solução : Calcule *uma solução* das EDOs:

- a) $xy'' + xy' + 3y = 0$
- b) $16x^2 y'' - 40xy' + (32x + 13)y = 0$
- c) $xy'' - y = 0$

4] Caso em que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, e r_2 leva à solução geral : Calcule uma solução geral das EDOs:

- a) $xy'' + 2y' - xy = 0$
 b) $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$
 c) $x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0$

5] Usando o método Frobenius II, calcule uma segunda solução linearmente independente:

- a) da EDO em 1(a)
 b) da EDO em 1(b)
 c) da EDO em 3(b)
 d) da EDO em 3(c)

6] Calcule a solução geral da EDO $xy'' + y' - 2y = 0$.

RESPOSTAS COM ALGUMAS SOLUÇÕES:

[1]

a) Solução de $x^2y'' + 3xy' + (1+2x)y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^{n+r}} = 0.$$

$$\left[\underbrace{r(r-1) + 3r + 1}_{r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2} \right] a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[(n+r-1)(n+r) + 3(n+r) + 1]}_{(n+r)(n+r+2)+1} a_n + 2a_{n-1} \right\} x^{n+r} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ (raiz dupla)} \\ [(n+r)(n+r+2) + 1] a_n + 2a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{[(n-1)(n+1) + 1]}_{n^2} a_n + 2a_{n-1} = 0.$$

$$a_n \Big|_{n \geq 1} = -\frac{2}{n^2} a_{n-1}.$$

$$a_1 = -\frac{2}{1} a_0 = -2a_0, \quad a_2 = -\frac{2}{4} a_1 = -\frac{1}{2}(-2a_0) = a_0, \quad a_3 = -\frac{2}{9} a_2 = -\frac{2}{9} a_0, \quad \dots$$

$$y(x) = a_0 x^{-1} \left(1 - 2x + x^2 - \frac{2}{9} x^3 + \dots \right) \blacksquare$$

$$\text{b) } r_1 = r_2 = 1/2, \quad a_n \Big|_{n \geq 1} = -\frac{a_{n-1}}{n^2}, \quad y = a_0 x^{1/2} \left(1 - x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{36} x^3 + \dots \right).$$

[2]

a) Solução de $2xy'' + y' - 6y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+r}}_{\sum_{n=1}^{\infty} 6a_{n-1} x^{n+r-1}} = 0.$$

$$\left[\underbrace{2r(r-1) + r}_{r(2r-1)} \right] a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[2(n+r)(n+r-1) + (n+r)]}_{(n+r)(2n+2r-2+1)} a_n - 6a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r(2r-1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1/2 \text{ raízes indiciais} \\ [(n+r)(2n+2r-1)] a_n = 6a_{n-1}, \text{ com } n \geq 1 \text{ (relação de recorrência dependente de } r) \end{array} \right.$$

• Para $r = 0$ a relação de recorrência é $a_n \Big|_{n \geq 1} = \frac{6}{n(2n-1)} a_{n-1}$, e obtemos:

$$a_1 = \frac{6}{1(1)} a_0 = 6a_0, \quad a_2 = \frac{6}{2(3)} a_1 = 6a_0, \quad a_3 = \frac{6}{3(5)} a_2 = \frac{2}{5}(6a_0) = \frac{12a_0}{5}, \quad \dots$$

$$y_1(x) = x^0 \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots \right) = a_0 \underbrace{\left(1 + 6x + 6x^2 + \frac{12x^3}{5} + \dots \right)}_{u_1(x)} \blacksquare$$

• Para $r = 1/2$ a relação de recorrência é $a_n|_{n \geq 1} = \frac{6}{n(2n+1)} a_{n-1}$, e obtemos:

$$a_1 = \frac{6}{1(3)} a_0 = 2a_0, \quad a_2 = \frac{6}{2(5)} a_1 = \frac{3}{5}(2a_0) = \frac{6a_0}{5}, \quad a_3 = \frac{6}{3(7)} a_2 = \frac{2}{7} \left(\frac{6a_0}{5} \right) = \frac{12a_0}{35}, \dots$$

$$y_2(x) = a_0 x^{1/2} \left(\underbrace{1 + 2x + \frac{6x^2}{5} + \frac{12x^3}{35} + \dots}_{u_2(x)} \right) \blacksquare$$

Obtivemos duas soluções linearmente independentes, nas quais o coeficiente a_0 em cada uma delas deve ser considerado como duas constantes arbitrárias independentes, digamos c_1 e c_2 . Logo, a solução geral é dada por $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ ■

b) $y = c_1 x \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{30} - \frac{x^3}{630} + \dots \right) + c_2 x^{1/2} \left(1 - x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{90} + \dots \right)$ ■

[3]

a) Solução de $xy'' + xy' + 3y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}}_{\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r-1}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+r}}_{\sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^{n+r-1}} = 0.$$

$$(r-1)ra_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n+r-1)(n+r)a_n + (n+r-1+3)a_{n-1} \} x^{n+r-1} = 0.$$

$$\begin{cases} (r-1)r = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } 1 \\ (n+r-1)(n+r)a_n + (n+r+2)a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

• Verifiquemos primeiramente a menor raiz $r = 0$:

A relação de recorrência é $n(n-1)a_n + (n+2)a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1)$.

Essa relação com $n = 1$ toma a forma $3a_0 = 0$, o que contradiz a hipótese $a_0 \neq 0$. Logo, não obtemos solução com a menor raiz indicial.

• Vamos calcular a solução associada à maior raiz $r = 1$:

A relação de recorrência é $(n+1)na_n + (n+3)a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n|_{n \geq 1} = -\frac{n+3}{n(n+1)} a_{n-1}$.

$$a_1 = \frac{-4}{1(2)} a_0 = -2a_0, \quad a_2 = \frac{-5}{2(3)} a_1 = \frac{-5}{6}(-2a_0) = \frac{5}{3}a_0, \quad a_3 = \frac{-6}{3(4)} a_2 = \frac{-1}{2} \left(\frac{5}{3}a_0 \right) = \frac{-5a_0}{6}, \dots$$

$$y(x) = a_0 x^1 \left(1 - 2x + \frac{5x^2}{3} - \frac{5x^3}{6} + \dots \right) \blacksquare$$

b) Solução de $16x^2 y'' - 40xy' + (32x + 13)y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 16(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 40(n+r)a_n x^{n+r} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 32a_n x^{n+r+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} 32a_{n-1} x^{n+r}} + \sum_{n=0}^{\infty} 13a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\left[\underbrace{16r(r-1) - 40r + 13}_{16r^2 - 56r + 13} \right] a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [16(n+r-1)(n+r) - 40(n+r) + 13] a_n + 32a_{n-1} \right\} x^{n+r} = 0.$$

$$\begin{cases} 16r^2 - 56r + 13 = 0 \Rightarrow r = 1/4 \text{ ou } 13/4 \\ [16(n+r-1)(n+r) - 40(n+r) + 13] a_n + 32a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

• Verifiquemos primeiramente a menor raiz $r = 1/4$. A relação de recorrência é

$$\left[16 \left(n - \frac{3}{4} \right) \left(n + \frac{1}{4} \right) - 40 \left(n + \frac{1}{4} \right) + 13 \right] a_n + 32a_{n-1} = 0 \Rightarrow 16n(n-3)a_n = -32a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Substituindo $n = 1, 2, \dots$, obtemos

$$n = 1: -32a_1 = -32a_0 \Rightarrow a_1 = a_0;$$

$$n = 2: -32a_2 = -32a_1 = -32a_0 \Rightarrow a_2 = a_0;$$

$n = 3 : 0 \cdot a_3 = -32a_2 = -32a_0 \Rightarrow a_0 = 0$: contradição com a hipótese $a_0 \neq 0$.

Vemos assim que não existe solução correspondente à menor raiz indicial.

• Calculemos a solução associada à maior raiz $r = 13/4$. A relação de recorrência é

$$\left[16\left(n + \frac{9}{4}\right)\left(n + \frac{13}{4}\right) - 40\left(n + \frac{13}{4}\right) + 13 \right] a_n + 32a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n \Big|_{n \geq 1} = -\frac{2a_{n-1}}{(n+3)n}.$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{5} = \frac{a_0}{10}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{9} = -\frac{a_0}{90}, \dots$$

$$y(x) = a_0 x^{13/4} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{90} + \dots \right) \blacksquare$$

c) $r = 0$ ou 1 . Com $r = 1$ obtém-se $y = a_0 x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{144} + \dots \right)$.

a) Solução de $xy'' + 2y' - xy = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}}_{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1}} = 0.$$

$$\left[\underbrace{(r-1)r + 2r}_{r(r+1)} \right] a_0 x^{r-1} + \left[\underbrace{r(r+1) + 2(r+1)}_{(r+1)(r+2)} \right] a_1 x^r + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[\underbrace{(n+r-1)(n+r) + 2(n+r)}_{(n+r)(n+r+1)} \right] a_n - a_{n-2} \right\} x^{n+r} = 0.$$

$$\begin{cases} r(r+1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } -1 \\ (n+r)(n+r+1)a_n = a_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

• Verifiquemos primeiramente a menor raiz $r = -1$:

O 2º termo da série: $(r+1)(r+2)a_1 = 0 \xrightarrow{r=-1} 0 = 0 \Rightarrow a_1$ permanece arbitrário.

$$(n+r)(n+r+1)a_n = a_{n-2} \quad (n \geq 2) \xrightarrow{r=-1} a_n \Big|_{n \geq 2} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}.$$

Assim,

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_4 = \frac{a_2}{12} = \frac{a_0}{24}, \quad \dots \quad a_3 = \frac{a_1}{6}, \quad a_5 = \frac{a_3}{20} = \frac{a_1}{120}, \quad \dots$$

Finalmente,

$$y = x^{-1} \left[a_0 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \right) \right] \quad (a_0 \text{ e } a_1 \text{ arbitrários}) \blacksquare$$

Uma vez que duas constantes (a_0 e a_1) permanecem arbitrárias, a solução que se obtém é a geral.

b) Solução de $x^2 y'' + 5xy' - 5y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 5a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\left[\underbrace{(r-1)r + 5r - 5}_{r^2 + 4r - 5} \right] a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + 5(n+r) - 5 \right] a_n x^{n+r} = 0.$$

$$\begin{cases} r^2 + 4r - 5 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ ou } -5 \\ \left[(n+r-1)(n+r) + 5(n+r) - 5 \right] a_n = 0 \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

• Verifiquemos primeiramente a menor raiz $r = -5$. Obtemos

$$\begin{aligned} \left[(n+r-1)(n+r) + 5(n+r) - 5 \right] a_n \Big|_{r=-5} &= \left[(n-6)(n-5) + 5(n-5) - 5 \right] a_n = 0 \\ \Rightarrow n(n-6)a_n \Big|_{n \geq 1} &= 0 \Rightarrow a_n \Big|_{n \neq 6} = 0 \text{ e } a_6 \text{ permanece arbitrário (tal qual) } a_0. \end{aligned}$$

Uma vez que duas constantes (a_0 e a_6) permanecem arbitrárias, a solução que se obtém é a geral.

Resposta: $y = x^{-5}(a_0 + a_6x^6) = a_0x^{-5} + a_6x$ ■

Acabamos de resolver uma EDO de Euler-Cauchy; obviamente ela também pode ser resolvida de modo mais simples pelos métodos analíticos que o aluno já aprendeu.

$$\text{c) } y = x^0 \left[a_0 \left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right) + a_4 \left(x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + \dots \right) \right] \quad (a_0 \text{ e } a_4 \text{ arbitrários}) \blacksquare$$

[5]

a) *Cálculo de uma segunda solução* de $x^2y'' + 3xy' + (1+2x)y = 0$:

[Convém ler o procedimento descrito no rodapé (*) da pág. 65.]

$$u_1(x) = \frac{1}{x} \underbrace{\left(1 - 2x + x^2 - \frac{2x^3}{9} + \dots \right)}_{\equiv P(x)} .$$

$$u_1^2(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + 4x^2 - 4x + 2x^2 - \frac{4x^3}{9} - 4x^3 + \dots \right) = \frac{1}{x^2} \underbrace{\left(1 - 4x + 6x^2 - \frac{40x^3}{9} + \dots \right)}_{P^2(x)} .$$

$$\frac{1}{P^2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow P^2(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(1 - 4x + 6x^2 - \frac{40x^3}{9} + \dots \right) (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) = 1 .$$

$$\underbrace{c_0}_1 + \underbrace{(c_1 - 4c_0)}_0 x + \underbrace{(c_2 - 4c_1 + 6c_0)}_0 x^2 + \underbrace{\left(c_3 - 4c_2 + 6c_1 - \frac{40c_0}{9} \right)}_0 x^3 + \dots = 1 .$$

$$c_0 = 1 ,$$

$$c_1 = 4c_0 = 4 ,$$

$$c_2 = 4c_1 - 6c_0 = 16 - 6 = -10 ,$$

$$c_3 = 4c_2 - 6c_1 + \frac{40c_0}{9} = -40 - 24 + \frac{40}{9} = -\frac{536}{9} .$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)} = \frac{1}{(1/x^2)P^2(x)} = x^2(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) = x^2 \left(1 + 4x - 10x^2 - \frac{536x^3}{9} + \dots \right) .$$

$$x^2y'' + 3xy' + (1+2x)y = 0 \Rightarrow y'' + \underbrace{(3/x)}_{p(x)}y' + \frac{1+2x}{x^2}y = 0 \Rightarrow e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int (3/x)dx} = e^{-3 \ln x} = \frac{1}{x^3} .$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \left[\underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{1/x^3} \right] \frac{1}{u_1^2(x)} dx = y_1(x) \int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 \left(1 + 4x - 10x^2 - \frac{536x^3}{9} + \dots \right) dx \\ &= y_1(x) \int \left(\frac{1}{x} + 4 - 10x - \frac{536x^2}{9} + \dots \right) dx \\ &= y_1(x) \left(\ln x + 4x - 5x^2 - \frac{536x^3}{27} + \dots \right) \rightsquigarrow \text{segunda solução} \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{b) } y_2(x) = y_1(x) \left(\ln x + 2x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{23}{27}x^3 + \dots \right) \rightsquigarrow \text{segunda solução} \blacksquare$$

$$\text{c) } y_2(x) = y_1(x) \left(-\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{11}{20}x^{-1} + \frac{2}{9} \ln x + \dots \right) \rightsquigarrow \text{segunda solução} \blacksquare$$

d) *Cálculo de uma segunda solução* de $xy'' - y = 0$:

[Convém ler o procedimento descrito no rodapé (*) da pág. 65.]

$$u_1(x) = x \underbrace{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{144} + \dots \right)}_{\equiv P(x)} .$$

$$u_1^2(x) = x^2 \left(1 + \frac{x^2}{4} + x + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{72} + \frac{x^3}{12} + \dots \right) = x^2 \underbrace{\left(1 + x + \frac{5x^2}{12} + \frac{7x^3}{22} + \dots \right)}_{P^2(x)} .$$

$$\frac{1}{P^2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow P^2(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(1 + x + \frac{5x^2}{12} + \frac{7x^3}{22} + \dots \right) (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) = 1 .$$

$$\underbrace{c_0}_1 + \underbrace{(c_1 + c_0)}_0 x + \underbrace{\left(c_2 + c_1 + \frac{5c_0}{12}\right)}_0 x^2 + \underbrace{\left(c_3 + c_2 + \frac{5c_1}{12} + \frac{7c_0}{12}\right)}_0 x^3 + \dots = 1$$

$$c_0 = 1,$$

$$c_1 = -c_0 = -1,$$

$$c_2 = -c_1 - \frac{5c_0}{12} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12},$$

$$c_3 = -c_2 - \frac{5c_1}{12} - \frac{7c_0}{12} = -\frac{7}{12} + \frac{5}{12} - \frac{7}{12} = -\frac{9}{12}.$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{P^2(x)} = \frac{1}{x^2} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots) = \frac{1}{x^2} \left(1 - x + \frac{7x^2}{12} - \frac{9x^3}{12} + \dots\right).$$

$$xy'' - y = 0 \Rightarrow y'' + 0y' - \frac{y}{x} = 0 \xrightarrow{p(x) \equiv 0} e^{-\int p(x) dx} = \text{const.} = 1 \text{ (sem perda de generalidade)}.$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \left[\underbrace{e^{-\int p(x) dx}}_1 \right] \frac{1}{u_1^2(x)} dx = y_1(x) \int 1 \cdot \frac{1}{x^2} \left(1 - x + \frac{7x^2}{12} - \frac{9x^3}{12} + \dots\right) dx \\ &= y_1(x) \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{7}{12} - \frac{9x}{12} + \dots \right) dx \\ &= y_1(x) \left(-\frac{1}{x} - \ln x + \frac{7x}{12} - \frac{9x^2}{24} + \dots \right) \rightsquigarrow \text{segunda solução} \blacksquare \end{aligned}$$

[6]

Solução de $xy'' + y' - 2y = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r}}_{\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^{n+r-1}} = 0.$$

$$\left[\underbrace{(r-1)r+r}_{r^2} \right] a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{[(n+r-1)(n+r) + (n+r)]}_{(n+r)^2} a_n - 2a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ (raiz dupla)} \\ [(n+r)^2] a_n - 2a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1) \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \Big|_{n \geq 1} = \frac{2}{n^2} a_{n-1} \Rightarrow a_1 = 2a_0, \quad a_2 = \frac{2}{4} a_1 = a_0, \quad \dots$$

$$y = y_1(x) = a_0 x^0 \left(\underbrace{1 + 2x + x^2 + \dots}_{u_1(x)} \right) \rightsquigarrow \text{primeira solução} \blacksquare$$

Cálculo de uma segunda solução linearmente independente usando a fórmula

$$y_2(x) = C u_1(x) \int \left[e^{-\int P(x) dx} \right] \left[\frac{1}{u_1^2(x)} \right] dx :$$

$$xy'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow y'' + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{P(x)} y' - (2/x)y = 0.$$

$$e^{-\int P(x) dx} = e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

$$u_1^2(x) = (1 + 2x + x^2 + \dots)^2 = 1 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + \dots = 1 + 4x + 6x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)} \equiv c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) u_1^2(x) = 1 \Rightarrow (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)(1 + 4x + 6x^2 + \dots) = 1.$$

$$\underbrace{c_0}_1 + x \underbrace{(c_1 + 4c_0)}_0 + x^2 \underbrace{(c_2 + 4c_1 + 6c_0)}_0 + \dots = 1 \Rightarrow c_0 = 1, \quad c_1 = -4c_0 = -4, \quad c_2 = -4c_1 - 6c_0 = 10.$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)} = 1 - 4x + 10x^2 + \dots$$

$$y_2(x) = C u_1(x) \int \frac{1}{x} (1 - 4x + 10x^2 + \dots) dx = \underbrace{C u_1(x)}_{y_1(x)} \int \left(\frac{1}{x} - 4 + 10x + \dots \right) dx.$$

$$y_2(x) = y_1(x) (\ln x - 4x + 5x^2 + \dots) \rightsquigarrow \text{segunda solução} \blacksquare$$

4.2 Funções de Legendre

4.2.1 Soluções da Equação de Legendre

Na seção 2.4 falamos sobre o problema de autovalor formado com a equação (2.37) (sobre o qual convém se releia a pequena discussão que se encontra após essa equação), isto é,

$$(1 - x^2)\psi'' - 2x\psi' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.15)$$

que agora passamos a resolver. Como $x = 0$ é um ponto ordinário dessa equação, podemos obter a solução na forma da série de MacLaurin $\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, cuja substituição nela fornece

$$(1 - x^2) \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} - 2x \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0,$$

ou

$$\underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2}}_{\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2} x^j} - \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} 2j a_j x^j + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,$$

ou ainda

$$\sum_{j=2}^{\infty} \overbrace{\left[(j+2)(j+1)a_{j+2} - \underbrace{[j(j-1) + 2j - \lambda] a_j}_{j(j+1) - \lambda} \right]}^{\equiv A_j} x^j + \underbrace{2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \lambda a_0 + \lambda a_1 x}_{[6a_3 - (2-\lambda)a_1]x + (2a_2 + \lambda) = A_1x + A_0} = 0$$

onde indicamos que, usando A_j para denotar o coeficiente genérico de qualquer potência, todos os termos da série podem ser incluídos num único somatório que começa com $j = 0$, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+2)(j+1)a_{j+2} - [j(j+1) - \lambda] a_j \right] x^j = 0.$$

Logo, igualando a zero o termo entre colchetes, obtemos a equação

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \lambda}{(j+2)(j+1)} a_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.16)$$

Esta é uma relação de recorrência, que permite calcular a_2, a_4, a_6, \dots em termos de a_0 , bem como a_3, a_5, a_7, \dots em termos de a_1 , permanecendo arbitrários os valores de a_0 e a_1 . É evidente que a solução geral é dada por

$$\psi(x) = \psi_P(x) + \psi_I(x), \quad (4.17)$$

onde

$$\psi_P(x) \equiv \sum_{j=0,2,4,\dots} a_j x^j \quad \text{e} \quad \psi_I(x) \equiv \sum_{j=1,3,5,\dots} a_j x^j, \quad (4.18)$$

ou seja, ψ_P é uma série de potências *pares* apresentando a constante arbitrária a_0 , e ψ_I é uma série de potências *ímpares* apresentando a constante arbitrária a_1 . As paridades distintas dessas duas séries garantem que sejam linearmente independentes. Além disso, é fácil verificar que as duas séries convergem em $(-1, 1)$ – isto é, nos pontos *interiores* do intervalo do problema – por meio do critério da razão:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+2} x^{j+2}}{a_j x^j} \right| = |x^2| \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{j(j+1) - \lambda}{(j+2)(j+1)} \right|}_1 < 1 \Rightarrow |x| < 1.$$

Façamos uma análise da convergência nos pontos extremos do intervalo (nos pontos $x = \pm 1$). Primeiramente, notamos que a relação de recorrência (4.16) tem um consequência importante: Na série par, se um coeficiente se anular, digamos $a_6 = 0$, então todos os posteriores também se anulam ($a_8 = a_{10} = \dots = 0$), ou seja, a série ψ_P termina, tornando-se um polinômio par, mas – demonstra-se! – a outra série, a ímpar, não terminando, diverge. Analogamente, na série ímpar, se um coeficiente se anular, digamos $a_5 = 0$, então todos os posteriores também se anulam ($a_7 = a_9 = \dots = 0$), ou seja, a série ψ_I termina, tornando-se um polinômio ímpar, mas – demonstra-se! – a outra série, a par, não terminando, diverge. Portanto, ao verificar se a condição em (2.26) é satisfeita, constatamos que só existem soluções com limites finitos quando $x \rightarrow -1^+$ e $x \rightarrow 1^-$ se uma das duas séries terminar.

E quais são os valores (ou, melhor, autovalores) de λ que levam a essas soluções polinomiais? Olhando a relação de recorrência (4.16), notamos polinômios são obtidos quando λ tiver um dos valores dados por $\lambda_l \equiv l(l+1)$ com $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. De fato, nesse caso, passando a relação de recorrência a ser

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+1)} a_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.19)$$

concluimos, para $j = l$, que o coeficiente a_{l+2} e, por conseguinte, também os coeficientes $a_{l+4}, a_{l+6}, a_{l+8}, \dots$, ou seja, uma das duas séries termina, tornando-se um polinômio de grau l (pois $a_j \neq 0$ apenas para $j \leq l$); esse polinômio é denotado por $P_l(x)$. Conforme l seja *par* ou *ímpar*, a série que termina é a $\psi_P = (a_0 \times \text{polinômio par})$ ou a $\psi_I = (a_1 \times \text{polinômio ímpar})$.

Os polinômios $P_l(x)$ ($l = 0, 1, 2, 3, \dots$) assim gerados (correspondentes às séries que terminam) são as *autofunções* correspondentes aos *autovalores* $\lambda_l \equiv l(l+1)$ do problema de autovalor em (4.15). Esses polinômios só recebem a denominação de polinômios de Legendre quando os coeficientes a_0 e a_1 (arbitrários até agora), são escolhidos conforme a normalização adotada, explicada adiante, na seção 4.2.2.

Para a EDO em (4.15) com $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$), a outra solução linearmente independente é a série que não termina, denotada por $Q_l(x)$, que não é autofunção do problema, pois não satisfaz a condição de finitude em todo o domínio (diverge quando $x \rightarrow -1^+$ e $x \rightarrow 1^-$), e a solução geral é, então,

$$\psi_l(x) = c_l P_l + Q_l(x) . \quad (4.20)$$

4.2.2 Polinômios de Legendre (As Funções de Legendre de 1ª Espécie)

Os coeficientes a_0 e a_1 podem ser colocados em evidência nas expressões das soluções. Note que a_0 aparece em P_l com l par e Q_l ímpar; já a_1 aparece em P_l ímpar e em Q_l com l par. Esses dois coeficiente, até agora livres, têm seus valores fixados de modo a padronizar as expressões das soluções polinomiais P_l e das séries infinitas Q_l .

A padronização de P_l é estabelecida pela condição de normalização

$$P_l(1) = 1 \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots) , \quad (4.21)$$

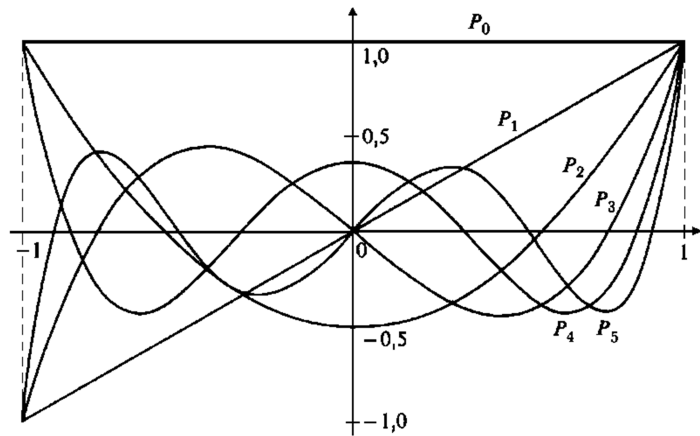
que acarreta nas seguintes expressões para aqueles dois coeficientes:

$$a_0 = \frac{(-1)^{l/2} l!}{2^l \left(\frac{l}{2}!\right)^2} \Bigg|_{l \text{ par}} \quad \text{e} \quad a_1 = \frac{(-1)^{(l-1)/2} l!}{2^{(l-1)} \left(\frac{l-1}{2}!\right)^2} \Bigg|_{l \text{ ímpar}} . \quad (4.22)$$

O polinômio $P_l(x)$ assim normalizado – i.e., satisfazendo (4.21) – é o l -ésimo polinômio de Legendre ou a l -ésima função de Legendre de 1ª espécie e – demonstra-se! – tem sua expressão fornecida pela conhecida fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{l! 2^l} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l . \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (3x^2 - 1) / 2 \\ P_3(x) &= (5x^3 - 3x) / 2 \\ P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3) / 8 \\ P_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x) / 8 \end{aligned}$$



a) Propriedades usadas na definição:

- $P_l(x)$ é um polinômio de grau l
- $P_l(x)$ só apresenta potências pares ou ímpares, conforme l seja par ou ímpar: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.
- $P_l(1) = 1$; logo, pela propriedade anterior, $P_l(-1) = (-1)^l$.

b) Função geradora dos polinômios de Legendre

A função

$$G(x, t) \equiv \sqrt{1 - 2xt + t^2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l, \quad \text{com } |t| < 1. \quad (4.24)$$

é denominada função geradora (ou geratriz) dos polinômios de Legendre.

c) Relação de ortonormalidade

Essa relação é dada por

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}, \quad (4.25)$$

que tanto expressa a ortogonalidade dos polinômios de Legendre,

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} = 0 \quad \text{se } l \neq m, \quad (4.26)$$

quanto fornece as normas deles, fazendo $l = m$,

$$\|P_l(x)\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1} \dots \dots \dots \text{norma quadrática} \quad (4.27)$$

Para deduzir essa norma quadrática, usamos a fórmula de Rodrigues $P_l(x) = [(x^2 - 1)^l]^{(l)} / (l! 2^l)$, dada por (4.23); observe:

$$\|P_l(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{[(x^2 - 1)^l]^{(l)}}{l! 2^l} \frac{[(x^2 - 1)^l]^{(l)}}{l! 2^l} dx.$$

Realizando l integrações por partes, obtemos

$$\begin{aligned} (l! 2^l)^2 \|P_l(x)\|^2 &= \underbrace{\left[[(x^2 - 1)^l]^{(l)} [(x^2 - 1)^l]^{(l-1)} \right]_{-1}^1}_0 - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^l]^{(l+1)} [(x^2 - 1)^l]^{(l-1)} dx \\ &= \dots = (-1)^l \int_{-1}^1 \underbrace{[(x^2 - 1)^l]^{(2l)}}_{(2l)!} \underbrace{[(x^2 - 1)^l]^{(0)}}_{(x^2 - 1)^l} dx = (2l)! (-1)^l \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l dx. \quad [I] \end{aligned}$$

Essa última integral pode ser calculada por meio de l integrações por partes por meio das quais o grau polinômio no integrando seja sempre reduzido:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l dx &= \underbrace{\left[x \cdot (x^2 - 1)^l \right]_{-1}^1}_0 - 2l \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{l-1} dx = (-1)^2 \frac{2^2 l(l-1)}{3} \int_{-1}^1 x^4 (x^2 - 1)^{l-2} dx \\ &= (-1)^3 \frac{2^3 l(l-1)(l-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \int_{-1}^1 x^6 (x^2 - 1)^{l-3} dx = \dots = (-1)^l \frac{2^l l(l-1)(l-2) \dots 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)} \int_{-1}^1 x^{2l} dx \\ &= \frac{(-1)^l (2^l l!)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)} \left[\frac{x^{2l}}{2l+1} \right]_{-1}^1 = \frac{(-1)^l (2^l l!)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)} \frac{2}{2l+1} \\ &= 2(-1)^l (l! 2^l) \frac{(2.1) \cdot (2.2) \cdot (2.3) \dots (2l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2l)(2l+1)} = 2(-1)^l (l! 2^l) \frac{2^l l!}{(2l+1)!} = \frac{2(-1)^l (l! 2^l)^2}{(2l+1)!}. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo esse resultado em [I], obtemos

$$(l! 2^l)^2 \|P_l(x)\|^2 = (2l)! (-1)^l \frac{2(-1)^l (l! 2^l)^2}{(2l+1)!} = \frac{2(l! 2^l)^2}{2l+1} \Rightarrow \|P_l(x)\|^2 = \frac{2}{2l+1} \checkmark$$

d) Relações de recorrência

Seguem algumas equações envolvendo polinômios de Legendre *diferentes*, conhecidas por relações de recorrência (note que uma tal equação envolvendo o *mesmo* polinômio de Legendre é a própria equação de Legendre). Elas são úteis para integrar esses polinômios, gerar os de graus mais elevados a partir dos de menor grau, etc.

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad (4.28)$$

$$P'_l(x) - 2xP'_{l-1}(x) + P'_{l-2}(x) = P_{l-1}(x) \quad (4.29)$$

$$P'_{l+1}(x) - xP'_l(x) = (l+1)P_l(x) \quad (4.30)$$

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x) \quad (4.31)$$

$$xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) = lP_l(x) \quad (4.32)$$

Vamos deduzir as duas primeiras relações de recorrência acima a partir de (4.24).

- Dedução de (4.28):

Por um lado, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2x+2t) = \frac{x-t}{1-2xt+t^2}G(x,t) \Rightarrow (x-t)G(x,t) = (1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t}.$$

Por outro, substituindo nesse resultado a expressão de $G(x,t)$ em série dada por (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} (x-t)\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l &= (1-2xt+t^2)\sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)t^{l-1} \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} xP_l(x)t^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^{l+1} &= \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)t^{l-1} - \sum_{l=1}^{\infty} 2xlP_l(x)t^l + \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)t^{l+1} \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} xP_l(x)t^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)t^l &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)t^l - \sum_{l=1}^{\infty} 2xlP_l(x)t^l + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)t^l \\ \Rightarrow \sum_{l=2}^{\infty} [xP_l(x) - P_{l-1}(x) - (l+1)P_{l+1}(x) + 2xlP_l(x) - (l-1)P_{l-1}(x)]t^l \\ &\quad + xP_0(x) + xP_1(x)t - P_0(x)t - P_1(x) - 2P_2(x)t + 2xP_1(x)t = 0 \\ \Rightarrow \sum_{l=2}^{\infty} \underbrace{[(2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) - (l+1)P_{l+1}(x)]}_0 t^l \\ &\quad + \underbrace{xP_0(x) - P_1(x)}_0 + \underbrace{[3xP_1(x) - P_0(x) - 2P_2(x)]}_0 t = 0, \end{aligned}$$

onde igualamos três termos a zero, obtendo três equações: a terceira é a primeira no caso particular em que $l = 1$, a segunda é obviamente verdadeira, e a primeira, válida para $l \geq 2$ e também $l = 1$, é a relação de recorrência (4.28). CQD.

- Dedução de (4.29):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2t) = \frac{t}{1-2xt+t^2}G(x,t) \Rightarrow (1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial x} = tG(x,t) \\ (1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l &= t\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2xP'_l(x)t^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^{l+2} &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^{l+1} \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l - \sum_{l=1}^{\infty} 2xP'_{l-1}(x)t^l + \sum_{l=2}^{\infty} P'_{l-2}(x)t^l &= \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)t^l \\ \Rightarrow \sum_{l=2}^{\infty} P'_l(x)t^l - \sum_{l=2}^{\infty} 2xP'_{l-1}(x)t^l + \sum_{l=2}^{\infty} P'_{l-2}(x)t^l - \sum_{l=2}^{\infty} P_{l-1}(x)t^l \\ &\quad + \underbrace{P'_0(x)}_0 - 2x\underbrace{P'_0(x)}_0 t + \underbrace{P'_1(x)t - P_0(x)}_{t-t=0} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{l=2}^{\infty} \underbrace{[P'_l(x) - 2xP'_{l-1}(x) + P'_{l-2}(x) - P_{l-1}(x)]}_0 &= 0, \end{aligned}$$

onde, ao se igualar a zero o termo geral do somatório (para $l \geq 2$), obtém a relação de recorrência (4.29). CQD.

As demais relações de recorrência são deduzidas a partir dessas duas.

4.2.3 As Funções de Legendre de 2ª Espécie

A padronização das funções $Q_l(x)$ é estabelecida de modo que elas satisfaçam as mesmas relações de recorrência dos polinômios de Legendre. Isso elimina a arbitrariedade dos coeficientes a_0 e a_1 de suas séries infinitas, que então passam a ser dados por

$$a_1 = \frac{(-1)^{l/2} 2^l \left(\frac{l}{2}\right)!}{l!} \Bigg|_{l \text{ par}} \quad \text{e} \quad a_0 = \frac{(-1)^{(l-1)/2} 2^{(l-1)} \left(\frac{l-1}{2}\right)!}{l!} \Bigg|_{l \text{ ímpar}}. \quad (4.33)$$

Como exemplo, vamos determinar a expressão das duas primeiras funções de Legendre de 2ª espécie, $Q_0(x)$ e $Q_1(x)$, desenvolvendo explicitamente as séries que as definem usando $a_1 = 1$ e $a_0 = -1$ [deduzidos de (4.33)]. Nessa

tarefa, é mais fácil usar a relação de recorrência (4.19) nesta outra forma deduzida a seguir:

$$\begin{aligned}
 a_{j+2} \Big|_{j=0,1,2,\dots} &= \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+1)} a_j = \frac{j^2 + j - l^2 - l}{(j+2)(j+1)} a_j \\
 &= \frac{(j-l)(j+l) + (j-l)}{(j+2)(j+1)} a_j = \frac{(j-l)(j+l+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \\
 \Rightarrow a_j \Big|_{j=2,3,4,\dots} &= \frac{(j-l-2)(j+l-1)}{j(j-1)} a_{j-2} .
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Pois bem, calculando $Q_0(x) \equiv \sum_{j=1,3,5,\dots} a_j x^j$ com $a_j = \frac{j-2}{j} a_{j-2}$ [que é (4.34) com $l=0$], obtemos

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1, \quad a_5 = \frac{3}{5} a_3 = \frac{1}{5} a_1, \quad a_7 = \frac{5}{7} a_5 = \frac{1}{7} a_1, \quad \dots, \quad a_j = \frac{1}{j} a_1;$$

logo,

$$Q_0(x) = \underbrace{a_1}_1 \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{x^j}{j} \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctanh} x \quad (|x| < 1) \quad \blacksquare \tag{4.35}$$

onde, na passagem (\dagger) , usamos o seguinte resultado:

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &= - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^j}{j} \\ \ln(1-x) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = 2 \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{x^j}{j} .$$

Calculemos agora a função $Q_1(x) \equiv \sum_{j=0,2,4,\dots} a_j x^j$ com $a_j = \frac{j-3}{j} a_{j-1}$ [que é (4.34) com $l=1$]:

$$a_2 = -a_0, \quad a_4 = \frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{3} a_0, \quad a_6 = \frac{3}{5} a_4 = -\frac{1}{5} a_0, \quad \dots, \quad a_j = -\frac{1}{j-1} a_0;$$

logo,

$$Q_1(x) \equiv \underbrace{-a_0}_1 \sum_{j=0,2,4,\dots} \frac{x^j}{j-1} = -1 + \sum_{j=2,4,6,\dots} \frac{x^j}{j-1} = -1 + \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{x^{j+1}}{j} = -1 + x \underbrace{\sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{x^j}{j}}_{Q_0(x)},$$

ou seja,

$$Q_1(x) = xQ_0(x) - 1 \quad (|x| < 1) \quad \blacksquare \tag{4.36}$$

Um bom modo de se deduzirem $Q_1(x)$, $Q_1(x)$, \dots é usando a relação de recorrência em (4.28), escrevendo-a na forma:

$$Q_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} xQ_l(x) - \frac{l}{l+1} Q_{l-1}(x) .$$

Se $l=1$:

$$\begin{aligned}
 Q_2(x) &= \frac{3}{2} xQ_1(x) - \frac{1}{2} Q_0(x) = \frac{3}{2} x(xQ_0 - 1) - \frac{1}{2} Q_0 = \overbrace{\frac{1}{2} (3x^2 - 1) Q_0}^{P_2} - \frac{1}{2} Q_0 \\
 &= P_2(x)Q_0(x) - \frac{3x}{2} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Se $l=2$:

$$\begin{aligned}
 Q_3(x) &= \frac{5}{3} xQ_2(x) - \frac{2}{3} Q_1(x) = \frac{5}{3} x \left[P_2Q_0 - \frac{3x}{2} \right] - \frac{2}{3} (xQ_0 - 1) \\
 &= \frac{5}{3} x \left[\left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) Q_0 - \frac{3x}{2} \right] - \frac{2}{3} (xQ_0 - 1) = \underbrace{\left[\frac{(5x^3 - 3x)}{2} \right] Q_0}_{P_3} - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3} \\
 &= P_3(x)Q_0(x) - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

E assim por diante.

4.3 Funções de Bessel

4.3.1 Função Gama

Veremos que a função gama está ligada ao estudo das funções de Bessel. Ela é assim definida:

$$\boxed{\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)} , \tag{4.37}$$

onde a restrição para valores de x positivos é necessária para evitar que a integral divirja. Em particular, note que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 . \quad (4.38)$$

Efetuemos a integral em (4.37) uma vez por partes, mas com x substituído por $x+1$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \underbrace{-e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty}}_0 + x \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{\Gamma(x)} ,$$

isto é,

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} . \quad (4.39)$$

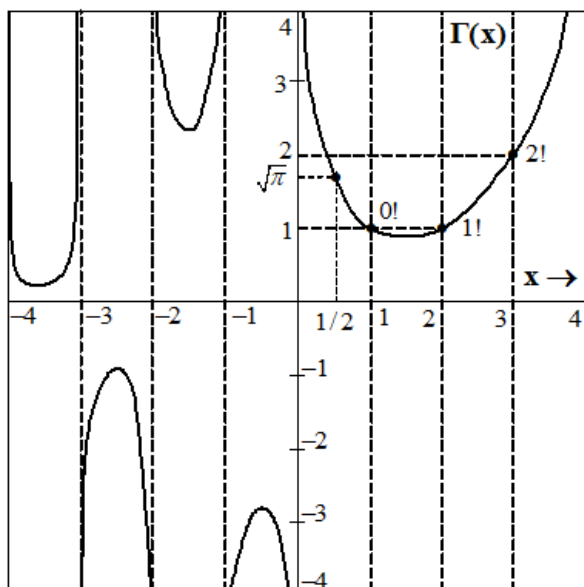
Essa é a propriedade mais importante da função gama.

Usando (4.39) repetidamente, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \Gamma(1) = 1 , \\ \Gamma(3) &= 2 \Gamma(2) = 2 \cdot 1 , \\ \Gamma(4) &= 3 \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 , \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n! \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots) . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esse resultado foi a motivação para a função gama; por meio dele faz-se a generalização do fatorial para número que não seja natural. Assim, define-se

$$x! \equiv \Gamma(x+1) \quad (x > -1) . \quad (4.41)$$



Embora a integral em (4.37) não convirja para $x \leq 0$, demonstra-se por definições alternativas a possibilidade de estender a função gama para todo z complexo, com exceção de $z = -n$ com $n \in \mathbb{N}$, e ainda valendo (4.39): $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. No que segue estamos interessados apenas na função $\Gamma(x)$, de variável real x , cujo gráfico é mostrado na figura à direita. Note, que o gráfico está de acordo com a fórmula (4.40):

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 0! \\ \Gamma(2) &= 1! \\ \Gamma(3) &= 2! \\ &\vdots \end{aligned}$$

Um valor particular da função gama de certo interesse é

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} , \quad (4.42)$$

que é assim calculado:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \stackrel{t=u^2}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta} = \sqrt{2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty}} = \sqrt{\pi} \checkmark \end{aligned}$$

Os valores de $\Gamma(x)$ são geralmente tabelados para $1 \leq x < 2$ (como na tabela acima), a partir dos quais todos os demais podem ser calculados usando, repetidamente se for necessário, a fórmula $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dada por (4.39). Vejamos um exemplo com $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Gamma(5,82) &= 4,82 \Gamma(4,82) = 4,82(3,82) \Gamma(3,82) \\ &= \dots = 4,82(3,82)(2,82)(1,82) \underbrace{\Gamma(1,82)}_{\text{tabelado}} = 4,82(3,82)(2,82)(1,82)(0,93685) . \end{aligned}$$

Gamma Function $\Gamma(\alpha)$										
α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.0	1.00000	0.99433	0.98884	0.98355	0.97844	0.97350	0.96874	0.96415	0.95973	0.95546
1.1	0.95135	0.94740	0.94359	0.93993	0.93642	0.93304	0.92980	0.92670	0.92373	0.92089
1.2	0.91817	0.91558	0.91311	0.91075	0.90852	0.90640	0.90440	0.90250	0.90072	0.89904
1.3	0.89747	0.89600	0.89464	0.89338	0.89222	0.89115	0.89018	0.88931	0.88854	0.88785
1.4	0.88726	0.88676	0.88636	0.88604	0.88581	0.88566	0.88560	0.88563	0.88575	0.88595
1.5	0.88623	0.88659	0.88704	0.88757	0.88818	0.88887	0.88964	0.89049	0.89142	0.89243
1.6	0.89352	0.89468	0.89592	0.89724	0.89864	0.90012	0.90167	0.90330	0.90500	0.90678
1.7	0.90864	0.91057	0.91258	0.91467	0.91683	0.91906	0.92137	0.92376	0.92623	0.92877
1.8	0.93138	0.93408	0.93685	0.93969	0.94261	0.94561	0.94869	0.95184	0.95507	0.95838
1.9	0.96177	0.96523	0.96877	0.97240	0.97610	0.97988	0.98374	0.98768	0.99171	0.99581

Agora um exemplo com $x < 1$; neste caso, usamos (4.39) na forma $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, repetidamente se for necessário:

$$\Gamma(-5, 8) = \frac{\Gamma(-4, 8)}{(-5, 8)} = \frac{\Gamma(-3, 8)}{(-5, 8)(-4, 8)} = \cdots = \frac{\overbrace{\Gamma(1, 2)}^{\text{tabelado}} [= 0, 91817]}{(-5, 8)(-4, 8)(-3, 8)(-2, 8)(-1, 8)(-0, 8)(0, 2)} .$$

Além disso, os valores de $\Gamma(x)$ para $x = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots$ podem ser calculados a partir do valor $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ usando (4.39), repetidamente se for necessário, na forma $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ quando $x = 3/2, 5/2, 7/2, \dots$ e $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ quando $x = -3/2, -5/2, -7/2, \dots$:

$$\Gamma(7/2) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi} ;$$

$$\Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-3/2)}{(-5/2)} = \frac{\Gamma(-1/2)}{(-5/2)(-3/2)} = \frac{\Gamma(1/2)}{(-5/2)(-3/2)(-1/2)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{15/8} .$$

Exercícios:

1] Calcule, usando a tabela quando necessário:

(a) $(4, 5)!$

(b) $\Gamma(3, 2)$

(c) $(-3, 2)!$

(d) $\Gamma(3/2) \Gamma(-1/2)$

(e) $(-5, 5)! / \Gamma(-7/2)$

(f) $\Gamma(11/7) / \Gamma(4/7)$

x	$\Gamma(x)$
1,2	0,918
1,4	0,887
1,6	0,894
1,8	0,931

2] Se $\Gamma(x+n+1) = a$ e $\Gamma(x-1) = b$, onde $x \in \mathbb{R} - \{\dots - 2, -1, 0, 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$,

calcule o valor de $P = \prod_{j=0}^n (x+j)$ em termos de a, b e x .

3] Mostre que

(a) $\int_0^\infty e^{-x^4} dx = (1/4) \Gamma(1/4)$

(b) $\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = 3\sqrt{\pi}/8$.

4.3.2 Solução Geral da Equação de Bessel

A equação de Bessel de ordem $\nu \geq 0$ é a seguinte:

$$\boxed{x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0} . \quad (4.43)$$

O ponto $x = 0$ é singular regular, o que enseja aplicar o método de Frobenius para resolvê-la. Substituindo $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$ nessa EDO, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2}}_{\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+r}} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 a_k x^{k+r} = 0 .$$

$$\begin{aligned} [r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0]x^r + [(r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2 a_1]x^{r+1} \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(k+r)(k+r-1) + (k+r) - \nu^2]a_k + a_{k-2}\}x^{k+r} = 0 . \end{aligned}$$

$$a_0 \underbrace{(r^2 - \nu^2)}_0 x^r + \underbrace{a_1(r^2 + 2r + 1 - \nu^2)}_0 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\{[k^2 + 2rk + r^2 - \nu^2]a_k + a_{k-2}\}}_0 x^{k+r} = 0 ,$$

donde três equações emergem:

- $r^2 - \nu^2 = 0$ (equação indicial)
- $a_k \Big|_{k \geq 2} = -\frac{a_{k-2}}{k^2 + 2rk + r^2 - \nu^2}$ (relação de recorrência dependente de r)
- $a_1(r^2 + 2r + 1 - \nu^2) = 0$

As raízes indiciais são $r = \pm \nu$. Prossigamos os cálculos com $r = \nu$:

$$a_k \Big|_{k \geq 2} = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)} \xrightarrow{k \rightarrow 2k} a_{2k} \Big|_{k \geq 1} = -\frac{1}{2^2(k)(\nu+k)} a_{2k-2} .$$

$$a_1(2\nu+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0 .$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2(2)(\nu+2)} a_2 = -\frac{1}{2^2(2)(\nu+2)} a_2 \frac{-a_0}{2^2(\nu+1)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4(2)(\nu+1)(\nu+2)} .$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2(3)(\nu+3)} a_4 = -\frac{1}{2^2(3)(\nu+3)} \frac{(-1)^2 a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6(2 \cdot 3)(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} .$$

\vdots

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(2 \cdot 3 \cdots k)(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+k)} .$$

Mas

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+k) &= \underbrace{\Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3) \cdots (\nu+k-1)(\nu+k)}_{\Gamma(\nu+2)} \\ &= \underbrace{\Gamma(\nu+2)(\nu+2)(\nu+3) \cdots (\nu+k-1)(\nu+k)}_{\Gamma(\nu+3)} \\ &= \underbrace{\Gamma(\nu+3)(\nu+3) \cdots (\nu+k)}_{\Gamma(\nu+4)} \\ &\vdots \\ &= \Gamma(\nu+k+1) , \end{aligned}$$

donde

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Substituindo esse resultado na expressão de a_{2k} acima e escolhendo o valor da constante arbitrária a_0 de modo que $a_0 2^\nu \Gamma(\nu+1) = 1$ para *padronizar* a solução, obtemos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \overbrace{[a_0 2^\nu \Gamma(\nu+k)]}^1}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}.$$

A substituição dessa expressão dos coeficientes na equação de Bessel (4.43) leva à seguinte solução particular dessa EDO:

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \quad (\nu \geq 0). \quad (4.44)$$

Realizando agora os cálculos com a outra raiz indicial $r = -\nu$, mas com $\nu \notin \mathbb{N}$, obtemos a segunda solução de (4.43), que, se igualmente padronizada, é dada por

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{-\nu+2k} k! \Gamma(-\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-\nu}}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \quad (\nu \geq 0), \quad (4.45)$$

que nada mais é que (4.44) com ν substituído por $-\nu$. Note que o argumento da função gama acima nunca se anula por causa da restrição de ν nunca ser um número natural.

Para $\nu \notin \mathbb{N}$, (4.44) e (4.45) são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel, o que se constata facilmente pelo primeiro termo delas (obtido com $k = 0$), sendo, portanto, $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ a solução geral. Mas, para $\nu = n \in \mathbb{N}$, a raiz indicial $r = -\nu = -n$ não leva a uma segunda solução, caso em que se deve aplicar os procedimentos prescritos pelo método de Frobenius [descritos na seq. 4.1.2] para o cálculo dessa segunda solução linearmente independente que falta. Esses cálculos são elaborados, e sua omissão aqui não afeta os objetivos deste texto, sendo suficiente resumir os resultados que nos interessam.

A segunda solução linearmente independente a $J_\nu(x)$ é padronizada para todo ν real considerando dois fatos (que podem ser demonstrados):

1) Quando $\nu \notin \mathbb{N}$, $J_\nu(x)$ e a função definida por

$$N_\nu(x) \equiv \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (\nu \notin \mathbb{N}) \quad (4.46)$$

são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem ν , o que nos leva a concluir que, nesse caso de ν diferente de um número natural, $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x)$ é outra forma da solução geral dessa EDO.

2) Embora (4.45) não possa ser usado com $n = 1, 2, 3, \dots$, é útil ter uma definição para $J_{-n}(x)$, que pode ser construída de modo que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ a partir de (4.44) com $\nu = -n$ como segue:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k-n+1)} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (x/2)^{2(k+n)-n}}{(k+n)! \Gamma(k+1)} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{\Gamma(k+n+1) k!} = (-1)^n J_n(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Acima, na passagem $(*)$, escrevemos o somatório começando com $k = n$ porque se anulam os termos com $k \leq n-1$; de fato, nesse caso $k-n+1 \leq 0 \Rightarrow |\Gamma(k-n+1)| \rightarrow \infty \Rightarrow 1/\Gamma(k-n+1) \rightarrow 0$. Nas passagens seguintes, mudamos o índice do somatório e usamos a propriedade (4.41) de $\Gamma(x)$.

3) Quando $\nu \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ e a função definida por

$$N_n(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) \quad (\nu \in \mathbb{N}) \quad (4.47)$$

são duas soluções linearmente da equação de Bessel de ordem $\nu = n$.

Assim, para todo $\nu \geq 0$, a solução geral da EDO (4.43) com $x \in (0, \infty)$ pode ser escrita como

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) , \quad (4.48)$$

onde $N_\nu(x)$ é dado por (4.46) ou (4.47) .

A série infinita que expressa $N_\nu(x)$ pode ser obtida inserindo (4.44) e (4.45) em (4.46) (havendo-se de, no caso em que $\nu \in \mathbb{N}$, efetuar o limite de quando ν tende a um natural n). Não há necessidade de exibir neste texto a expressão genérica da série que representa $N_\nu(x)$.

A nomenclatura para as funções em (4.48) é a seguinte: $J_\nu(x)$ é a função de Bessel de ordem ν , e $N_\nu(x)$ (também denotada por $Y_\nu(x)$, principalmente por matemáticos) é a função de Neumann de ordem ν , sendo ambas também chamadas de funções de Bessel de ordem ν de 1ª e 2ª espécie, respectivamente.

Assim como a solução geral da equação $y'' + y(x) = 0$ pode ser escrita na forma $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ou na forma $y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$, pois $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ e $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, a *solução geral da equação de Bessel também pode ser expressa na forma*

$$y = c_1 H_\nu^{(1)}(x) + c_2 H_\nu^{(2)}(x) \quad (4.49)$$

mediante a definição das funções

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad \text{e} \quad H_\nu^{(2)}(x) \equiv J_\nu(x) - iN_\nu(x) , \quad (4.50)$$

respectivamente denominadas primeira e segunda função de Hankel de ordem ν (ou primeira e segunda função de Bessel de 3ª espécie de ordem ν).

Na literatura, as funções $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ e $H_\nu^{(2)}(x)$ são definidas com x e ν complexos, mas estamos aqui interessados apenas nos valores dessas funções para x e ν reais e não negativos.

4.3.3 Solução Geral da Equação de Bessel Modificada

A equação de Bessel modificada de ordem $\nu \geq 0$ é a seguinte:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0 \quad (4.51)$$

Um modo de se obter a solução $y(x)$ dessa EDO consiste em convertê-la na equação de Bessel (cuja solução já nos é conhecida). Isso é feito mediante a transformação de variável $t \equiv ix$ [v. Nota (1) abaixo]:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0 \xrightarrow[y(x) = y(x(t)) \equiv y(t)]{t \equiv ix} t^2 y''(t) + ty'(t) + (t^2 - \nu^2)y(t) = 0 ;$$

logo,

$$y = c_1 J_\nu(t) + c_2 N_\nu(t) = c_1 J_\nu(ix) + c_2 N_\nu(ix) ,$$

mostrando que a solução da equação de Bessel modificada é formada pelas funções J_ν e N_ν com argumento imaginário puro [v. Nota (2) abaixo]. Mas não são essas funções que são usadas, e sim as que são definidas a seguir:

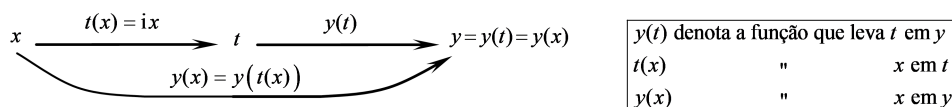
$i^{-\nu} J_\nu(ix) \equiv I_\nu(x)$ função de Bessel modificada de 1ª espécie de ordem ν

$(\pi/2) i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)] \equiv K_\nu(x)$ função de Bessel modificada de 2ª espécie de ordem ν

Vemos que as funções $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ definidas acima: (a) são combinações lineares das soluções $J_\nu(ix)$ e $N_\nu(ix)$ da equação de Bessel modificada e, portanto, também são soluções dessa equação, e (b) são linearmente independentes; logo, elas formam a *solução geral da equação de Bessel modificada*:

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x) \quad (4.52)$$

Nota 1 – Conversão de uma equação de Bessel modificada numa equação de Bessel:



A EDO (4.43), se tiver sua variável x mudada para $t = ix$, passa a exibir, na variável t , a forma da EDO (4.51). A seguir mostramos isso, denotando as funções envolvidas nessa conversão como mostra a figura acima. Uma vez que $y(x)$ é a função composta $y(t(x))$, usamos a regra da cadeia para calcular a sua derivada $y'(x)$.

$$\overline{y'(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \underbrace{\frac{dt}{dx}}_i = \overline{y'(t) i},$$

$$\overline{y''(x)} = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} [y'(t) i] = \frac{d}{dt} [y'(t) i] \underbrace{\frac{dt}{dx}}_i = i^2 \frac{d}{dt} y'(t) = \overline{-y''(t)}.$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + \nu^2) y(x) &= -t^2 [-y''(t)] + (-it)[y'(t) i] - (-t^2 + \nu^2) y(t) \\ &= t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - \nu^2) y(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 2 – Compare o que se fez acima para se obter a solução da equação de Bessel modificada a partir da solução da equação de Bessel com o que se faz abaixo para se obter a solução da equação $y'' - y(x) = 0$ a partir da solução da equação $y'' + y(x) = 0$ (são usados os resultados quadriculados deduzidos na Nota 1, pois a mesma mudança de variáveis $t = ix$ é efetuada):

$$\begin{aligned} y''(x) - y(x) = 0 &\xrightarrow[y(x) = y(t(x))]{t \equiv ix} [-y''(t)] - y(t) = 0 \Rightarrow y''(t) + y(t) = 0 \\ \Rightarrow y &= c_1 \cos t + c_2 \sin t = c_1 \cos ix + c_2 \sin ix. \end{aligned}$$

Mas são definidas as funções [v. item (2) da seção 1.13]

$$\cos ix \equiv \cosh x \quad \text{e} \quad -i \sin ix \equiv \sinh x,$$

em termo das quais

$$y = d_1 \cosh x + d_2 \sinh x.$$

Essa semelhança entre a construção das funções I_ν e K_ν a partir das funções J_ν e N_ν e a construção de \cosh e \sinh a partir de \cos e \sin enseja chamar I_ν e K_ν de *funções de Bessel hiperbólicas*.

4.3.4 Propriedades das Funções de Bessel

4.3.4.1 Gráficos

Em sentido amplo, as funções J_ν , N_ν , $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, I_ν e K_ν são todas chamadas funções de Bessel (de ordem ν). Na página seguinte são mostrados seus gráficos para alguns valores de ν (exceto as de Hankel). Convém que o aluno sempre se lembre destas propriedades, haja vista sua importância na resolução de EDPs:

Quanto à variação :

As funções de Bessel *oscilam* (sem serem periódicas, exceto para $x \rightarrow \infty$), e as funções de Bessel modificadas são *monótonas*.

Na origem ($x = 0$) :

$$\text{As funções de 1ª espécie são finitas: } \begin{cases} J_0(0) = I_0(0) = 1 & (\nu = 0) \\ J_\nu(0) = I_\nu(0) = 0 & (\nu > 0) \end{cases}$$

$$\text{As funções de 2ª espécie são infinitas: } \begin{cases} N_\nu(x \rightarrow 0) \rightarrow -\infty \\ K_\nu(x \rightarrow 0) \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{Assintoticamente ($x \rightarrow \infty$) : } \begin{cases} J_\nu(x \rightarrow \infty) = N_\nu(x \rightarrow \infty) = K_\nu(x \rightarrow \infty) = 0 \\ I_\nu(x \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \end{cases}$$

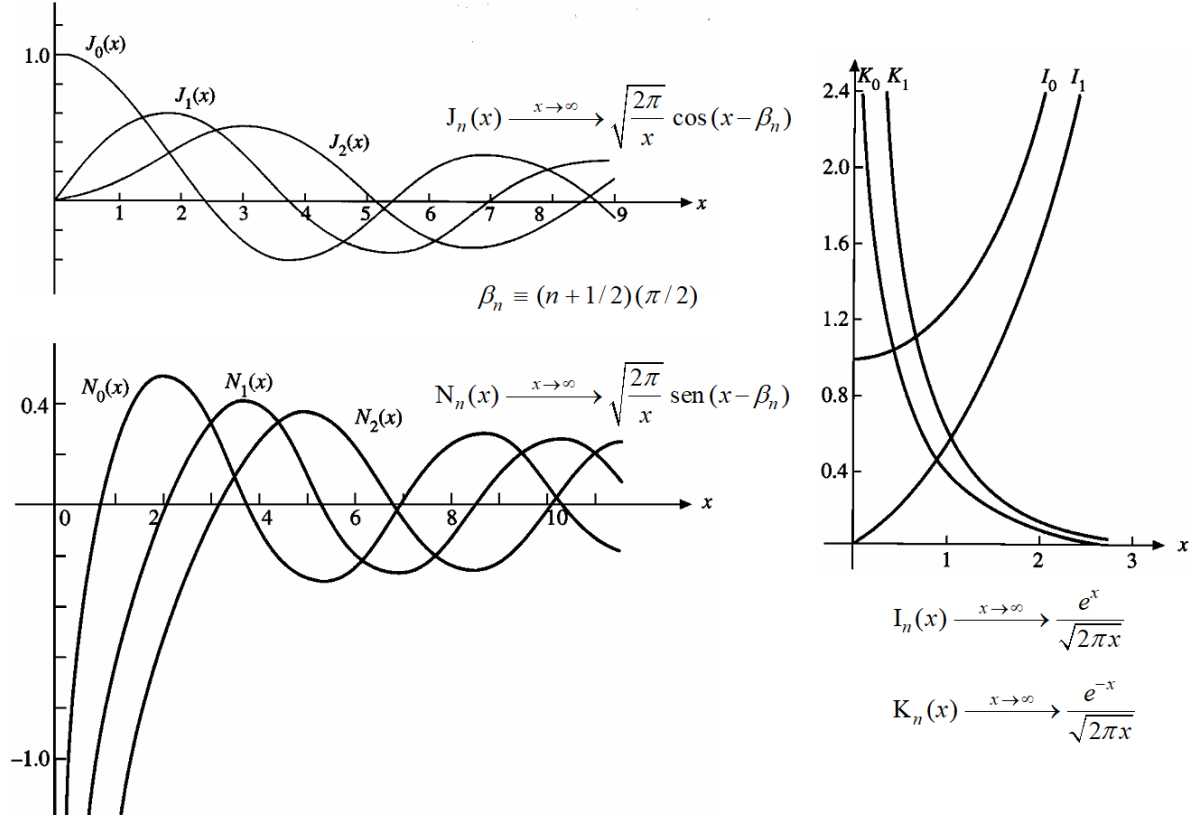
Quanto à apresentação de zeros :

As soluções da equação de Bessel J_ν e N_ν , oscilatórias, apresentam uma infinidade de zeros positivos. O mesmo acontece com as suas derivadas J'_ν e N'_ν (cujos zeros localizam-se nas abscissas de máximo e mínimo de J_ν e N_ν). Já as soluções da equação de Bessel modificada I_ν e K_ν , monótonas, não exibem zeros.

Nota: Observamos algo similar quando comparamos as soluções

- $\cos x$ e $\sin x$ da equação $y'' + y(x) = 0 \rightarrow$ oscilatórias e apresentando uma infinidade de zeros com as soluções
- e^x e e^{-x} (ou $\cosh x$ e $\sinh x$) da equação *modificada* $y'' - y(x) = 0 \rightarrow$ monótonas e sem zeros.

Na figura abaixo são apresentados alguns gráficos dessas funções para ajudar a visualizar as citadas propriedades.



4.3.4.2 Fórmulas de Recorrência

Uma vez que, de acordo com (4.44),

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(1+k+\nu)} \quad (\nu \geq 0),$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(\alpha x) \right] &= \frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha x)^{2k+\nu}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(1+k+\nu)} \right] = \frac{d}{dx} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+\nu} x^{2k}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(1+k+\nu)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+\nu} 2k x^{2k-1}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(1+k+\nu)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+\nu} x^{2k-1}}{2^{\nu+2k-1} (k-1)! \Gamma(1+k+\nu)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha^{2(k+1)+\nu} x^{2(k+1)-1}}{2^{\nu+2(k+1)-1} k! \Gamma(1+k+1+\nu)} = -\alpha x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha x)^{2k+\nu+1}}{2^{\nu+2k+1} k! \Gamma(1+k+\nu+1)}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(\alpha x) \right] = -\alpha x^{-\nu} J_{\nu+1}(\alpha x). \quad (4.53)$$

De modo análogo, deduz-se que

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(\alpha x) \right] = \alpha x^\nu J_{\nu-1}(\alpha x). \quad (4.54)$$

Efetuando as derivadas no primeiro membro desses dois resultados, obtemos respectivamente os dois seguinte:

$$\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) = -\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(\alpha x) \quad (4.55)$$

e

$$\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) = \alpha J_{\nu-1}(\alpha x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(\alpha x) . \quad (4.56)$$

Adicionando e subtraindo essas duas últimas equações, também obtemos

$$\frac{2}{\alpha} \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) = \alpha J_{\nu-1}(\alpha x) - J_{\nu+1}(\alpha x) \quad (4.57)$$

e

$$J_{\nu-1}(\alpha x) + J_{\nu+1}(\alpha x) = \frac{2\nu}{\alpha x} J_\nu(\alpha x) . \quad (4.58)$$

As equações enumeradas acima constituem as fórmulas de recorrência mais usadas (frequentemente com $\alpha = 1$). Elas também são válidas para as funções N_ν , $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$. As funções I_ν e K_ν satisfazem essas fórmulas com poucas modificações (um sinal ou outro), para as quais pode ser consultada a seção 4.9 da Ref. [3].

Capítulo 5

A Série de Fourier-Bessel e sua Aplicação na Resolução de EDPs

- Ref. [4, seq. 5.8] e [5, seq. 12.9]
- Ref. [8], seq. 11.5.1 e 13.2
- Ref. [6], cap. 6

5.1 Funções de Bessel como Autofunções

Nosso objetivo nesta seção é resolver problemas de autovalor formados com a EDO

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda \rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0, \quad (5.1)$$

que surge na separação de variáveis das EDPs do calor, da onda e de Laplace nas coordenadas cilíndricas $(\rho, \varphi$ e $z)$ sob as condições de fronteira mais corriqueiras.^(†) Uma vez que, na busca dos autovalores, há a necessidade de resolver a EDO (5.1) com $\lambda = 0$, $\lambda = -k^2$ (negativo) e $\lambda = k^2$ (positivo), nosso primeiro passo é escrever a solução dessa EDO nesses três casos.

a) Com $\lambda = 0$, (5.1) é a equação de Euler $\rho^2 R'' + \rho R' - \nu^2 R(\rho) = 0$, com a conhecida solução (v. seção 6.7.4 da Apostila de Cálculo 4):

$$R(\rho) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln \rho \\ c_1 \rho^\nu + c_2 / \rho^\nu \end{cases}.$$

b) Com $\lambda = k^2$ ($k > 0$), (5.1) torna-se

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (k^2 \rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0. \quad (5.2)$$

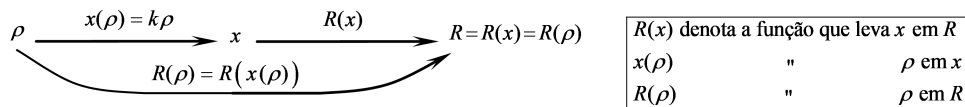
Mudando da variável ρ para a nova variável $x \equiv k\rho$, essa EDO toma a forma (v. a Nota 1 abaixo para os detalhes dessa transformação)

$$x^2 R'' + x R' + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0,$$

que, de acordo com (4.43), é a equação de Bessel de ordem ν , cuja solução geral, segundo (4.48), é $R = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x)$, a qual, voltando para a variável ρ original, se torna na solução geral de (5.2):

$$R = c_1 J_\nu(k\rho) + c_2 N_\nu(k\rho). \quad (5.3)$$

Nota 1 – Transformação da EDO (5.2) na forma da EDO (4.43):



^(†) Esta seção tem uma exposição análoga à seção 2.3, onde resolvemos problemas de autovalor com a EDO $\psi'' + \lambda\psi(x) = 0$, que surge na separação de variáveis dessas mesmas EDPs, só que nas coordenadas cartesianas.

Nessa transformação, usamos a notação descrita na figura acima. Uma vez que $R(\rho)$ é a função composta $R(x(\rho))$, usamos a regra da cadeia para calcular a sua derivada $R'(\rho)$.

$$\overline{R'(\rho)} = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx} \underbrace{\frac{dx}{d\rho}}_k = \overline{R'(x)k},$$

$$\overline{R''(\rho)} = \frac{d}{d\rho} R'(\rho) = \frac{d}{d\rho} [R'(x)k] = \frac{d}{dx} [R'(x)k] \underbrace{\frac{dx}{d\rho}}_k = k^2 \frac{d}{dx} R'(x) = \overline{k^2 R''(x)}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (k^2 \rho^2 - \nu^2) R(\rho) &= \left(\frac{x}{k}\right)^2 [k^2 R''(x)] + \frac{x}{k} [R'(x)k] + (x^2 - \nu^2) R(x) \\ &= x^2 R''(x) + x R'(x) + (x^2 - \nu^2) R(x) \blacksquare \end{aligned}$$

c) Com $\lambda = -k^2$ ($k > 0$), (5.1) torna-se

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - (k^2 \rho^2 + \nu^2) R = 0. \quad (5.4)$$

Para resolver essa EDO, novamente fazemos a mudança de variável $x = k\rho$, substituímos nela os resultados $R''(\rho) = k^2 R''(x)$ e $R'(\rho) = k R'(x)$ já deduzidos na Nota 1 acima, e a obtemos na forma

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 k^2 R''(x) + \left(\frac{x}{k}\right) k R'(x) - (x^2 + \nu^2) R(x) = x^2 R'' + x R' - (x^2 + \nu^2) R(x) = 0,$$

que é a equação de Bessel modificada de ordem ν (4.51), cuja solução, de acordo com (4.52), é dada por $R = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x)$; logo, voltando para a variável ρ , obtemos a solução geral de (5.4):

$$R = c_1 I_\nu(k\rho) + c_2 K_\nu(k\rho). \quad (5.5)$$

Escrevamos, então, essas soluções num único quadro:

$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda \rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0$	
\Downarrow	
Se $\lambda = 0$:	$\rho^2 R'' + \rho R' - \nu^2 R(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(\rho) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln \rho & (\nu = 0) \\ c_1 \rho^\nu + c_2 / \rho^\nu & (\nu > 0) \end{cases} \quad (5.6a)$
Se $\lambda = -k^2$ ($k > 0$) :	$\rho^2 R'' + \rho R' - (k^2 \rho^2 + \nu^2) R(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(\rho) = c_1 I_\nu(k\rho) + c_2 K_\nu(k\rho) \quad (5.6b)$
Se $\lambda = k^2$ ($k > 0$) :	$\rho^2 R'' + \rho R' + (k^2 \rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(\rho) = \begin{cases} c_1 J_\nu(k\rho) + c_2 N_\nu(k\rho) \\ \text{ou} \\ c_1 H_\nu^{(1)}(k\rho) + c_2 H_\nu^{(2)}(k\rho) \end{cases} \quad (5.6c)$

Agora que já temos essas soluções da EDO (5.1), já podemos resolver problemas de autovalores formado com essa EDO. Mas, antes, vejamos como é a relação de ortogonalidade entre as autofunções originadas de tais problemas:

A EDO (5.1) escrita na forma da equação de Sturm-Liouville (2.24) é dada por

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda \rho - \frac{\nu^2}{\rho} \right) R = 0, \quad (5.7)$$

mostrando que as funções u , v e w em (2.24) são, no caso, dadas por $u(\rho) = 1$, $v(\rho) = -\nu^2/\rho$ e $w(\rho) = \rho$. Assim, as autofunções $R_k(\rho)$ do problema de autovalor formado pela EDO (5.1), com $\rho \in I \subset \mathbb{R}$, e por uma condição CF-n (v. pág. 37) nos extremos de I são ortogonais com respeito ao produto escalar de função peso $w(\rho) = \rho$, isto é, se m e n são dois valores quaisquer do índice k em $R_k(\rho)$, então

$$\int_I R_m(\rho) R_n(\rho) \rho d\rho = 0 \text{ se } m \neq n. \quad (5.8)$$

Neste texto, apenas dois problemas de autovalor baseados na EDO (5.1) são considerados, em que essa EDO é resolvida para $\rho \in (0, b)$ em ambos. Eles diferem apenas no tipo da condição no extremo $\rho = b$ desse intervalo: CF-1 (Dirichlet) no primeiro e CF-2 (Neumann) no segundo. Nenhuma condição de fronteira é imposta no extremo $\rho = 0$ de $(0, b)$ porque, em (5.7), a função $u(\rho) = \rho$ se anula nesse extremo, indicando a ocorrência da condição CF-4, que suprime a necessidade de qualquer condição na fronteira $\rho = 0$. No que segue, primeiramente resumimos os principais resultados – autovalores, autofunções, normas quadráticas, e série de Fourier generalizada – dos dois problemas de autovalor; depois apresentamos a resolução deles.

Problema de autovalor (i)

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda \rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0 \\ \rho \in (0, b), \quad R(b) = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\zeta_{\nu n}}{b}\right)^2 \xleftrightarrow{n=1,2,3,\dots} R_n(\rho) = J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \\ \zeta_{\nu n} : n\text{-ésimo zero positivo de } J_\nu, \text{ i.e., } J_\nu(\zeta_{\nu n}) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

- Relação de ortogonalidade: $\int_0^b J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu m} \rho}{b}\right) J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho = 0$ se $m \neq n$.
- Normas quadráticas: $\|J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right)\|^2 = \int_0^b J_\nu^2\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho \stackrel{(*)}{=} \frac{b^2}{2} J_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu n})$. (5.10)

(*) Esse resultado é deduzido no final desta seção 5.1

- Série de Fourier generalizada (dita série de Fourier-Bessel) de $f(\rho)$:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right), \quad \text{com } A_n = \frac{\left\langle J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right), f \right\rangle}{\|J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right)\|^2} = \frac{\int_0^b f(\rho) J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho}{\int_0^b J_\nu^2\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho}. \quad (5.11)$$

Problema de autovalor (ii)

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda \rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0 \\ \rho \in (0, b), \quad R'(b) = 0 \quad (\text{Neumann}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \leftrightarrow R_0(\rho) = 1 \text{ se } \nu = 0 \quad (\text{resultado extra}) \\ \lambda_n = \left(\frac{\zeta_{\nu n}}{b}\right)^2 \xleftrightarrow{n=1,2,3,\dots} R_n(\rho) = J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \\ \zeta_{\nu n} : n\text{-ésimo zero positivo de } J'_\nu, \text{ i.e., } J'_\nu(\zeta_{\nu n}) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

- Relação de ortogonalidade (abaixo, m e n podem ter qualquer valor natural não nulo):

$$\text{Para todo } \nu \geq 0 : \int_0^b J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu m} \rho}{b}\right) J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho = 0 \text{ se } m \neq n.$$

Mas, se $\nu = 0$, há de se considerar o resultado extra, acrescentando a relação de ortogonalidade entre a autofunção constante $R_0(\rho) = 1$ e as demais autofunções $J_0(\zeta_{0n} \rho/b)$:

$$\int_0^b J_0\left(\frac{\zeta_{0n} \rho}{b}\right) \rho d\rho = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \text{onde } \zeta_{0n} \text{ é o } n\text{-ésimo zero de } J'_0, \text{ i.e., } J'_0(\zeta_{0n}) = 0.$$

- Normas quadráticas:

$$\|J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right)\|^2 = \int_0^b J_\nu^2\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho \stackrel{(*)}{=} \frac{b^2}{2} \left[1 - \frac{\nu^2}{\zeta_{\nu n}^2}\right] J_\nu^2(\zeta_{\nu n}); \quad (5.13)$$

(*) Esse resultado é deduzido no final desta seção 5.1.

$$\|\underbrace{R_0(\rho)}_1\|^2 = \int_0^b 1^2 \rho d\rho = \frac{b^2}{2} \quad (\text{resultado extra a se considerar quando } \nu = 0).$$

- Série de Fourier generalizada (dita série de Fourier-Bessel) de $f(\rho)$:

$$f(\rho) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\nu}\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right),$$

onde

$$A_n|_{n \geq 1} = \frac{\left\langle J_{\nu}\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right), f \right\rangle}{\|J_{\nu}\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right)\|^2} = \frac{\int_0^b f(\rho) J_{\nu}\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho}{\int_0^b J_{\nu}^2\left(\frac{\zeta_{\nu n} \rho}{b}\right) \rho d\rho},$$

e A_0 só está presente (i.e., difere de zero) se $\nu = 0$, quando então é dado por

$$A_0 = \frac{\langle R_0, f \rangle}{\|R_0(\rho)\|^2} = \frac{\int_0^b f(\rho) \rho d\rho}{\int_0^b 1^2 \rho d\rho} = \frac{2}{b^2} \int_0^b f(\rho) \rho d\rho.$$

Resolução do problema de autovalor (i) :

A solução da EDO deste problema de autovalor é dada por (5.6), onde notamos que todas as funções que se encontram multiplicadas pela constante c_2 tornam-se infinitas quando $\rho \rightarrow 0$, o que nos leva a fazer $c_2 = 0$ para descartar tais funções, assim satisfazendo a condição de finitude das soluções. Logo,

$$R(\rho) = \begin{cases} \begin{cases} c_1 & (\nu = 0) \\ c_1 \rho^{\nu} & (\nu > 0) \end{cases} & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 I_{\nu}(k\rho) & \text{se } \lambda = -k^2 \ (k > 0) \\ R = c_1 J_{\nu}(k\rho) & \text{se } \lambda = k^2 \ (k > 0). \end{cases} \quad (5.14)$$

Agora buscamos autofunções conforme o sinal de λ .

$$\text{Para } \lambda = 0 : R(\rho) = \begin{cases} c_1 & (\nu = 0) \\ c_1 \rho^{\nu} & (\nu > 0) \end{cases}$$

$$\therefore R(b) = \begin{cases} c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 & (\nu = 0) \\ c_1 b^{\nu} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 & (\nu > 0) \end{cases} \Rightarrow R(\rho) \equiv 0 \text{ (solução trivial): não há o autovalor nulo.}$$

$$\text{Para } \lambda = -k^2 \ (k > 0) : R(\rho) = c_1 I_{\nu}(k\rho)$$

$$\therefore R(b) = c_1 \underbrace{I_{\nu}(kb)}_{\text{nunca se anula}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow R(\rho) \equiv 0 \text{ (solução trivial): não há autovalores negativos.}$$

$$\text{Para } \lambda = k^2 \ (k > 0) : R(\rho) = c_1 J_{\nu}(k\rho)$$

$$\therefore R(b) = c_1 J_{\nu}(kb) = 0 \xrightarrow[\text{para evitar a solução trivial}]{\text{admite-se } c_1 \neq 0} J_{\nu}(kb) = 0 \Rightarrow kb = \zeta_{\nu n} \Rightarrow k = k_n = \zeta_{\nu n}/b,$$

onde $\zeta_{\nu n}$ é o n -ésimo zero positivo de J_{ν} .

Logo, $\lambda = \lambda_n = (\zeta_{\nu n}/b)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) são os autovalores, e $R_n(\rho) = J_{\nu}(\zeta_{\nu n} \rho/b)$ são as autofunções correspondentes ■

Resolução do problema de autovalor (ii) :

Como única diferença entre este problema de autovalor e o anterior é a condição de Neumann em $\rho = b$, devemos buscar soluções da mesma forma exibida em (5.14):

Para $\lambda = 0$: $R(\rho) = \begin{cases} c_1 & (\nu = 0) \\ c_1 \rho^\nu & (\nu > 0) \end{cases}$

$$\therefore R'(b) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow R'(b) = 0 \text{ é possível para qualquer valor de } c_1 \text{ se } \nu = 0 \\ c_1 \nu b^{\nu-1} = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow R(\rho) \equiv 0 : \text{ solução trivial se } \nu > 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = -k^2$ ($k > 0$) : $R(\rho) = c_1 I_\nu(k\rho)$

$$\therefore R'(b) = c_1 \underbrace{k}_{\neq 0} \underbrace{I'_\nu(kb)}_{\text{nunca se anula}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow R(\rho) \equiv 0 \text{ (solução trivial)} : \text{ não há autovalores negativos.}$$

Para $\lambda = k^2$ ($k > 0$) : $R(\rho) = c_1 J_\nu(k\rho)$

$$\therefore R(b) = c_1 \underbrace{k}_{k \neq 0} J'_\nu(kb) = 0 \xrightarrow[\text{para evitar a solução trivial}]{\text{admite-se } c_1 \neq 0} J'_\nu(kb) = 0 \Rightarrow kb = \zeta_{\nu n} \Rightarrow k = k_n = \zeta_{\nu n}/b ,$$

onde $\zeta_{\nu n}$ é o n -ésimo zero positivo de J'_ν .

Logo, $\lambda = \lambda_n = (\zeta_{\nu n}/b)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) são os autovalores, e $R_n(\rho) = J_\nu(\zeta_{\nu n}\rho/b)$ são as autofunções correspondentes, havendo de se acrescentar, no caso em que $\nu = 0$, o autovalor $\lambda_0 = 0$ e a respectiva autofunção $R_0(\rho) = 1$ ■

Vamos agora deduzir as normas quadráticas em (5.10) e (5.13) das autofunções $R_n(\rho) = J_\nu(\zeta_{\nu n}\rho/b)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) dos problemas de autovalor (i) e (ii) definidos em (5.9) e (5.12). As autofunções do prob. (i) diferem das do prob. (ii) apenas por serem $\zeta_{\nu n}$ os zeros de J_ν no primeiro e os de J'_ν no segundo. Por causa disso podemos provar (5.10) e (5.13) num único cálculo, apresentado a seguir.

Essas autofunções são soluções da EDO exibidas em (5.9) e (5.12). Logo, tomando essa EDO na forma de Sturm-Liouville, dada por (5.7), podemos escrever

$$(\rho R'_n)' + (\lambda_n \rho - \nu^2/\rho) R_n(\rho) = 0 .$$

Multiplicando essa equação por $2\rho R'_n$, obtemos

$$2\rho R'_n (\rho R'_n)' + (\lambda_n \rho^2 - \nu^2) 2R_n(\rho) R'_n = 0 ,$$

que, usando a fórmula $2F(\rho)F' = dF^2/d\rho$ com $F = \rho R'_n$ no primeiro termo e $F = R_n$ no segundo, toma a forma

$$\frac{d}{d\rho} (\rho R'_n)^2 + (\lambda_n \rho^2 - \nu^2) \frac{d}{d\rho} R_n^2 = 0 .$$

Integremos essa equação uma vez por partes no intervalo $[0, \rho]$:

$$\left[(\rho R'_n)^2 \right]_0^\rho + \left[(\lambda_n \rho^2 - \nu^2) R_n^2 \right]_0^\rho - 2\lambda_n \int_0^\rho \rho R_n^2 d\rho = 0 ,$$

donde

$$\left[b R'_n(b) \right]^2 + (\lambda_n b^2 - \nu^2) R_n^2(b) + \left[\nu R_n(0) \right]^2 - 2\lambda_n \int_0^b \rho R_n^2 d\rho = 0 .$$

Mas

$$\nu R_n(0) = \nu J_\nu(\zeta_{\nu n}\rho/b)|_{\rho=0} = \nu J_\nu(0) = \begin{cases} (0)(1) = 0 & \text{se } \nu = 0 \\ (\nu)(0) = 0 & \text{se } \nu > 0 \end{cases} = 0 ;$$

logo, substituindo $\lambda_n = (\zeta_{\nu n}/b^2)^2$, obtemos

$$\|R_n(\rho)\|^2 = \frac{b^2}{2\zeta_{\nu n}^2} \left\{ b^2 [R'_n(b)]^2 + (\zeta_{\nu n}^2 - \nu^2) [R_n(b)]^2 \right\} .$$

Uma vez que $R_n(b) = 0$ no prob. (i) e $R'_n(b) = 0$ no prob. (ii), temos que

$$\|R_n(\rho)\|^2 = \begin{cases} \frac{b^4}{2\zeta_n^2} [R'_n(b)]^2 \dots\dots\dots \text{prob. (i)} \\ \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\zeta_{\nu n}^2} \right) [R_n(b)]^2 \dots\dots\dots \text{prob. (ii)} . \end{cases} \quad [I]$$

• Para o prob. (ii), a norma quadrática em (5.13) é imediatamente obtida com a substituição em [I] de $[R_n(b)]^2 = [R_n(b) J_\nu(\zeta_{\nu n}\rho/b)]^2|_{\rho=b} = J_\nu^2(\zeta_{\nu n})$ ✓

• Para o prob. (i), ainda temos de calcular $R'_n(b)$, o que realizamos usando a fórmula de recorrência (4.55) com $x = \rho$ e $\alpha = \zeta_{\nu n}/b$:

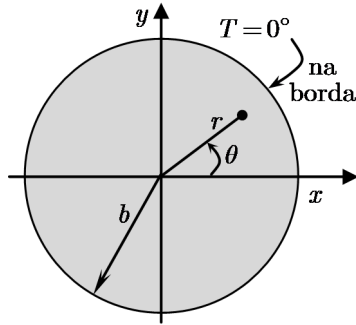
$$\underbrace{\frac{d}{d\rho} J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n}\rho}{b}\right)}_{R_n(\rho)} = R'_n(\rho) = -\frac{\zeta_{\nu n}}{b} J_{\nu+1}\left(\frac{\zeta_{\nu n}\rho}{b}\right) + \frac{\nu}{\rho} J_\nu\left(\frac{\zeta_{\nu n}\rho}{b}\right)$$

$$\xrightarrow{\rho=b} R'_n(b) = -\frac{\zeta_{\nu n}}{b} J_{\nu+1}(\zeta_{\nu n}) + \frac{\nu}{b} \underbrace{J_\nu(\zeta_{\nu n})}_0 = -\frac{\zeta_{\nu n}}{b} J_{\nu+1}(\zeta_{\nu n}) .$$

A substituição desse resultado em [I] fornece a norma quadrática em (5.10) ✓

5.2 Aplicação da Série de Fourier-Bessel na Resolução de EDPs

— **Exemplo 5.2.1.** Cálculo da temperatura $T(r, \theta, t)$ (coordenadas polares) na placa circular mostrada na figura, de bordas submetidas a 0° e inicialmente à temperatura $T = T_0(\rho)$.



Note que a temperatura inicial na placa não depende do ângulo θ : há uma *simetria angular*. Como não há razão para que essa simetria se desfaça com o decorrer do tempo, a temperatura mantém-se independente de θ : $T = T(r, t)$. Assim, devemos resolver a equação do calor sob a condição de fronteira $T(b, t) = 0$ e a condição inicial $T(r, 0) = T_0(r)$, com $r \in (0, b)$, isto é,

$$\begin{cases} \nabla^2 T(r, \theta, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & r \in (0, b), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad t > 0 \\ T(b, t) = 0, & T(r, 0) = T_0(r). \end{cases} \quad (5.15)$$

Com a separação espaço-temporal $T(r, t) = \psi(r)\tau(t)$, e lembrando que ψ herda a condição de fronteira imposta a T ; logo,

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0 & \text{(eq. de Helmholtz), sob a condição } \psi(b) = 0. \\ \tau' + \lambda \alpha \tau(t) = 0 & \text{(EDO temporal)}. \end{cases}$$

No caso, uma vez que $\partial \psi / \partial \theta = 0$ por causa da simetria angular, a equação Helmholtz toma a forma

$$\nabla^2 \psi + \lambda \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}}_0 + \lambda \psi(r) = 0 \quad \xrightarrow{\times r^2} \quad r^2 \psi'' + r \psi' + \lambda r^2 \psi(r) = 0,$$

que é a EDO de Bessel de ordem zero. Ou seja, o problema de autovalor que se obtém é aquele em (5.9) com $\nu = 0$:

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + \lambda \rho^2 R(\rho) = 0 \\ \rho \in (0, b), \quad R(b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\lambda_n = (\zeta_{0n}/b)^2} \xleftarrow{n=1,2,3,\dots} R_n(\rho) = J_0\left(\frac{\zeta_{0n}\rho}{b}\right) \\ \boxed{\zeta_{0n} : n\text{-ésimo zero positivo de } J_0}. \end{cases}$$

A solução da EDO temporal não apresenta novidade: $\tau'_n + \lambda_n \alpha \tau_n(t) = 0 \Rightarrow \tau_n(t) = A_n e^{-\lambda_n \alpha t}$. Podemos agora escrever a expressão para a solução geral:

$$\boxed{T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n \alpha t} J_0\left(\frac{\zeta_{0n} r}{b}\right)}.$$

Impondo a condição inicial, temos a série de Fourier-Bessel

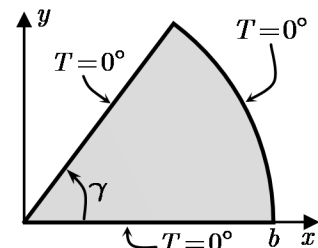
$$T(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\zeta_{0n} r}{b}\right) = T_0(r),$$

cujos coeficientes são calculados usando (5.11):

$$\boxed{A_n = \frac{\int_0^b T_0(r) J_0\left(\frac{\zeta_{0n} r}{b}\right) r dr}{\int_0^b J_0^2\left(\frac{\zeta_{0n} r}{b}\right) r dr}}.$$

A solução $T(r, t)$ do problema consiste no que, acima, se encontra delimitado por retângulos.

— **Exemplo 5.2.2.** Resolvemos agora a equação do calor em coordenadas polares sem a simetria angular do Exemplo 1. O intuito é perceber quais mudanças nos cálculos a quebra dessa simetria acarreta. A placa onde se deseja calcular a temperatura $T(r, \theta, t)$ tem a forma de um setor circular, como mostra a figura à direita, cujas bordas são todas mantidas em 0° , sendo a temperatura inicialmente nela agora dependente da variável angular, dada por $T_0(r, \theta)$.



No que segue, a numeração **1]**, **2]**, \dots refere-se às etapas em que foram divididas a resolução deste problema.

1] O problema de calor a ser resolvido é assim formulado:

$$\begin{cases} \nabla^2 T(r, \theta, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & r \in (0, b), \quad \theta \in (0, \gamma), \quad t > 0 \\ T(r, 0, t) = T(r, \gamma, t) = T(b, \theta, t) = 0, & T(r, \theta, 0) = T_0(r, \theta). \end{cases} \quad (5.16)$$

2] Realizemos a separação espaço-temporal:

$$\begin{aligned} T(r, \theta, t) = \psi(r, \theta)\tau(t) &\Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda \\ \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0 & \text{(eq. de Helmholtz), sob as mesmas condições de fronteira que } T. \\ \tau' + \lambda \alpha \tau(t) = 0 & \text{(EDO temporal)}. \end{cases} \end{aligned}$$

3] A parte espacial ψ é solução do seguinte problema de autovalor (em duas variáveis, r e θ):

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(r, \theta) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \lambda \psi(r, \theta) = 0 \\ r \in (0, b), \quad \theta \in (0, \gamma), \quad t > 0 \\ \psi(r, 0) = \psi(r, \gamma) = \psi(b, \theta) = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Agora, em vez de uma EDO, temos uma EDP, a qual, para resolvê-la, usamos uma nova separação de variáveis: $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Substituindo essa expressão na equação de Helmholtz em (5.17), obtemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (R\Theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R\Theta) + \lambda (R\Theta) = \left(R'' + \frac{1}{r} R' \right) \Theta + \frac{1}{r^2} R \Theta'' + \lambda R \Theta = 0.$$

A divisão dessa EDO por $R\Theta$ fornece

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{\equiv -\mu} + \lambda = 0.$$

A forma dessa equação nos permite concluir que o termo Θ''/Θ é constante [daí o igualarmos à constante de separação $(-\mu)$], pois esse termo dependente apenas de θ pode ser isolado num dos lados da equação, passando o outro lado a conter termos que só dependem de r . Conseguimos assim separar as duas EDOs

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu \Theta(\theta) = 0 & \text{(EDO angular)} \\ r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu) R(r) = 0 & \text{(EDO radial)}. \end{cases}$$

A EDO angular e as condições de fronteira homogêneas para Θ que se deduzem a partir das condições $\psi(r, 0) = \psi(r, \gamma) = 0$ do problema (5.17) formam o seguinte problema de autovalor, de solução conhecida [v. (2.30)]:

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu \Theta(\theta) = 0, & \theta \in (0, \gamma) \\ \Theta(0) = \Theta(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\gamma)^2 & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \Theta_m(\theta) = \sin(m\pi\theta/\gamma). \end{cases}$$

Já a EDO radial com $\mu = \mu_m = (m\pi/\gamma)^2$ e a condição de fronteira $R(b) = 0$ que se deduz da outra condição, $\psi(b, \theta) = 0$, do problema (5.17), isto é,

$$r^2 R'' + r R' + [\lambda r^2 - (m\pi/\gamma)^2] R(r) = 0, \quad r \in (0, b), \quad R(b) = 0,$$

formam, para cada $m = 1, 2, \dots$, um problema de autovalor do tipo definido em (5.9) com $\nu = m\pi/\gamma$. No m -ésimo desses problemas, buscam-se os autovalores λ_{mn} e as correspondentes autofunções $R_{mn}(r)$ (nessa notação com dois índices, n enumera os autovalores e autofunções do m -ésimo problema de autovalor). No caso, sendo $\nu = \nu_m \equiv m\pi/\gamma$ a ordem da equação de Bessel no problema de autovalor

acima, temos que os autovalores e as autofunções são $\lambda_{mn} = (\zeta_{\nu_m n}/b)^2$ e $R_{mn} = J_{\nu_m}(\zeta_{\nu_m n} \rho/b)$. No que segue, preferimos usar a notação ζ_{mn} e $J_{\frac{m\pi}{\gamma}}$ em vez de $\zeta_{\nu_m n}$ e J_{ν_m} :

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\zeta_{mn}}{b}\right)^2 \xleftrightarrow{n=1,2,3,\dots} R_{mn}(r) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right), \text{ onde } \boxed{\zeta_{mn} \text{ é o } n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m\pi}{\gamma}}}.$$

Estão assim determinados os autovalores λ_{mn} e as autofunções $\psi_{mn}(r, \theta) = R_{mn}(r)\Theta_m(\theta)$ do problema de autovalor (5.17):

$$\boxed{\lambda_{mn} = \left(\frac{\zeta_{mn}}{b}\right)^2} \xleftrightarrow{m,n=1,2,3,\dots} \psi_{mn}(r, \theta) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma}. \quad (5.18)$$

4] A solução da EDO temporal $\tau'_{mn} + \lambda_{mn}\alpha\tau_{mn}(t) = 0$ é dada por $\tau_n(t) = A_{mn} e^{-\lambda_{mn}\alpha t}$.

5] Uma vez obtidas as soluções $\psi_{mn}(r, \theta)$ e $\tau_{mn}(t)$ das EDOs espacial e temporal, podemos formar a solução geral deste problema de calor:

$$\boxed{T(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\lambda_{mn}\alpha t} J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma}}.$$

6] Impondo a condição inicial, obtemos a série dupla de Fourier generalizada

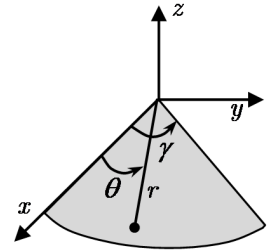
$$T(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} = T_0(r, \theta).$$

Finalmente, usando (2.38) e (2.39), obtemos a fórmula que fornece os coeficientes A_{mn} , assim finalizando a solução:

$$\boxed{A_{mn} = \frac{\int_0^{\gamma} \int_0^b T_0(r, \theta) J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} r dr d\theta}{\int_0^b J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) r dr \underbrace{\int_0^{\gamma} \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\gamma} d\theta}_{\gamma/2}}.$$

A solução $T(r, \theta, t)$ do problema consiste no que, acima, se encontra delimitado por retângulos.

—— **Exemplo 5.2.3.** Considere o problema ondulatório que consiste em calcular, no sistema de coordenadas polares, a deflexão $z(r, \theta, t)$ de uma membrana que tem a forma de um setor circular, como mostra a figura à direita. As bordas encontram-se presas no plano $z = 0$, e as condições iniciais da membrana são dadas por $z(r, \theta, 0) = z_0(r, \theta)$ e $\frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta)$.



1] A formulação desse problema é como segue:

$$\begin{cases} \nabla^2 z(r, \theta, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, & r \in (0, b), \theta \in (0, \gamma), t > 0 \\ z(r, 0, t) = z(r, \gamma, t) = z(b, \theta, t) = 0, & z(r, \theta, 0) = z_0(r, \theta), \frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta). \end{cases} \quad (5.19)$$

2] A separação espaço-temporal fornece

$$z(r, \theta, t) = \psi(r, \theta)\tau(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''}{\tau} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0 & (\text{eq. de Helmholtz}), \text{ sob as mesmas condições de fronteira que } z. \\ \tau'' + \lambda c^2 \tau(t) = 0 & (\text{EDO temporal}). \end{cases}$$

3] Esta terceira etapa da resolução deste problema de onda é idêntica à terceira etapa da resolução do problema de calor no Exemplo 5.2.2, pois, nesses dois problemas, o domínio espacial é o mesmo (o setor circular nas Figuras 5.2 e 5.2), e as condições de fronteira são do mesmo tipo (condições de

Dirichlet), o que leva a parte espacial $\psi(r, \theta)$ da solução daquele problema de calor e a deste problema de onda resultarem de um mesmo problema de autovalor: aquele definido em (5.17). Logo, podemos aproveitar os autovalores e as autofunções desse problema de autovalor já calculados no Exemplo 5.2.2, listados em (5.18):

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_{mn} = (\zeta_{mn}/b)^2} \xleftrightarrow{m,n=1,2,3,\dots} \psi_{mn}(r, \theta) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} \\ \boxed{\zeta_{mn} \text{ é o } n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m\pi}{\gamma}}} \end{array} \right.$$

4] Solução da EDO temporal $\tau''_{mn} + \lambda_{mn}c^2\tau_{mn}(t) = 0$ (obtida no passo 2) :

$$\tau_n(t) = A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t, \quad \text{onde } \omega_{mn} \equiv c\sqrt{\lambda_{mn}}.$$

5] De posse das soluções $\psi_{mn}(r, \theta)$ e $\tau_{mn}(t)$ das EDOs espacial e temporal, podemos formar a solução geral deste problema de onda:

$$z(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t) J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma}.$$

6] Para calcular os coeficientes na solução geral, impomos as condições iniciais:

$$z(r, \theta, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} = z_0(r, \theta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} B_{mn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} = v_0(r, \theta).$$

Temos aí duas séries duplas de Fourier generalizadas em senos e funções de Bessel dos dados iniciais $z_0(r, \theta)$ e $v_0(r, \theta)$. Finalizamos o problema calculando os coeficientes A_{mn} e B_{mn} usando (2.38) e (2.39):

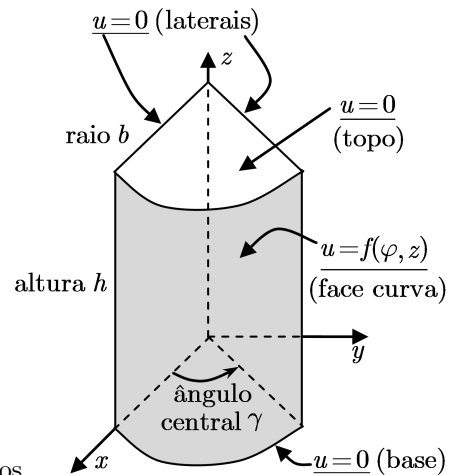
$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{\int_0^\gamma \int_0^b z_0(r, \theta) J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} r dr d\theta}{\int_0^\gamma J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) r dr \int_0^\gamma \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\gamma} d\theta}, \\ \text{e} \\ \omega_{mn} B_{mn} &= \frac{\int_0^\gamma \int_0^b v_0(r, \theta) J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \sin \frac{m\pi\theta}{\gamma} r dr d\theta}{\int_0^\gamma J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) r dr \int_0^\gamma \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\gamma} d\theta}. \end{aligned}$$

A solução $z(r, \theta, t)$ do problema consiste no que, acima, se encontra delimitado por retângulos.

— **Exemplo 5.2.4.** Cálculo da solução da equação de Laplace $\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = 0$ (coordenadas cilíndricas) no setor de tronco cilíndrico ilustrado à direita, de raio b , ângulo central γ e altura h , sob as condições de fronteira indicadas. A formulação desse problema é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\rho, \varphi, z) = 0 \\ \rho \in (0, b), \quad \varphi \in (0, \gamma), \quad z \in (0, h) \\ u(\rho, 0, z) = u(\rho, \gamma, z) = 0 \\ u(\rho, \varphi, 0) = u(\rho, \varphi, h) = 0 \\ u(b, \varphi, z) = f(\varphi, z) \end{array} \right.$$

Substituindo $u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ na EDP acima, obtemos



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(R\Phi Z) = \left(R'' + \frac{1}{\rho} R'\right)\Phi Z + \frac{1}{\rho^2} R\Phi''Z + R\Phi Z'' = 0$$

$$\xrightarrow{\div R\Phi Z} \frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\beta} = 0. \quad (5.20)$$

As condições de fronteira homogêneas na faces horizontais [em $(z = 0)$ e $(z = h)$] bem como nas faces verticais [em $(\varphi = 0)$ e $(\varphi = \gamma)$] evidenciam que as partes $Z(z)$ e $\Phi(\varphi)$ resultam de problemas de autovalor independentes [que devem ser resolvidos antes de determinar a parte $R(r)$, cujo cálculo depende dos autovalores provenientes daqueles dois problemas de autovalor]. Essa é a razão de, na equação (5.20), termos separado EDOs para $\Phi(\varphi)$ e $Z(z)$ igualando os termos sabidamente constantes Φ''/Φ e Z''/Z às constantes $(-\mu)$ e $(-\beta)$ [os sinais negativos seguem o estipulado na Nota emitida após a equação (3.32)]. Após essas duas separações, resta a EDO para $R(\rho)$. As três EDOs separadas são

$$Z'' + \beta Z(z) = 0, \quad \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \rho^2 R'' + \rho R' - (\beta \rho^2 + \mu) R(\rho) = 0. \quad (5.21)$$

A EDOs para as partes $Z(z)$ e $\Phi(\varphi)$ sob as condições de fronteira que essas partes devem satisfazer [deduzidas das condições de fronteira para $u(\rho, \varphi, z)$] formam os seguintes problemas de autovalor, de soluções conhecidas [v. (2.30)]:

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0, & z \in (0, h) \\ Z(0) = Z(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_l = (l\pi/h)^2 & (l = 1, 2, 3, \dots) \\ Z_l(z) = \text{sen}(l\pi z/h). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0, & \varphi \in (0, \gamma) \\ \Phi(0) = \Phi(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\gamma)^2 & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \Phi_m(\varphi) = \text{sen}(m\pi\varphi/\gamma). \end{cases} \quad (5.22)$$

Substituindo os autovalores de β e μ já calculados na EDO para $R(\rho)$ em (5.21), obtemos

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \left(\underbrace{\beta_l}_{\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2} \rho^2 + \underbrace{\mu_m}_{\left(\frac{m\pi}{\gamma}\right)^2} \right) R(\rho) = 0, \text{ isto é, } \rho^2 R'' + \rho R' - \left[\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 \rho^2 + \left(\frac{m\pi}{\gamma}\right)^2 \right] R(\rho) = 0,$$

uma equação de Bessel modificada de ordem $m\pi/\gamma$, cuja solução geral, de acordo com (5.6b), é

$$R_{lm}(\rho) = A_{lm} I_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{l\pi\rho}{h} \right) + \underbrace{B_{lm}}_0 K_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{l\pi\rho}{h} \right),$$

onde deixamos indicado que devemos fazer $B_{lm} = 0$ para evitar infinitude quando $\rho \rightarrow 0$, pois as funções K_ν são singulares na origem.

Logo, já tendo determinado as três partes $R_{lm}(\rho)$, $\Phi_m(\varphi)$ e $Z_l(z)$ que compõem a infinidade de soluções $u_{lm}(\rho, \varphi, z) = R_{lm}(\rho) \Phi_m(\varphi) Z_l(z)$ que o problema, até este ponto (ainda sem impor a condição de fronteira não homogênea) apresenta, podemos formar sua solução geral:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{lm} I_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{l\pi\rho}{h} \right) \text{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \text{sen} \frac{l\pi z}{h}.$$

Agora impomos a condição de fronteira não homogênea:

$$u(b, \varphi, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{A_{lm} I_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{l\pi b}{h} \right)}_* \text{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \text{sen} \frac{l\pi z}{h} = f(\varphi, z),$$

onde percebemos que o termo marcado com $*$ são os coeficientes de uma série de Fourier dupla em senos que são dados por

$$A_{lm} I_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{l\pi b}{h} \right) = \frac{\int_0^h \int_0^\gamma f(\varphi, z) \text{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \text{sen} \frac{l\pi z}{h} d\varphi dz}{\int_0^\gamma \text{sen}^2 \frac{m\pi\varphi}{\gamma} d\varphi \int_0^h \text{sen}^2 \frac{l\pi z}{h} dz}.$$

— **Exemplo 5.2.5.** Resolva o seguinte problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\rho, \varphi, z) = 0 \\ \rho \in (0, b), \quad \varphi \in (0, \gamma), \quad z \in (0, h) \\ u(b, \varphi, z) = 0 \\ u(r, 0, z) = u(r, \gamma, z) = 0 \\ u(r, \varphi, 0) = 0, \quad u(r, \varphi, h) = f(r, \varphi). \end{cases}$$

Trata-se de resolver a equação de Laplace para $u(\rho, \varphi, z)$ no sólido mostrado na figura, sob a condição de u se anular em todas as faces desse sólido, exceto no topo (a única hachurada). Esse problema difere daquele no exemplo anterior apenas quanto à única face em que $u \neq 0$, ocorrendo isso, no anterior, apenas na face lá hachurada (na face curva). Portanto, após a separação de variáveis $u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, aqui devemos resolver primeiramente os problemas de autovalor que surgem para $\Phi(\varphi)$ e $R(\rho)$ e só então proceder ao cálculo de $Z(z)$.

Podemos aproveitar, na resolução do problema anterior, a equação (5.20), na qual havemos de separar primeiramente a EDO para $\Phi(\varphi)$ usando a constante $(-\mu)$ e, depois, a EDO para $R(\rho)$ usando a constante $(-\lambda)$, assim resultando, ao final dessas duas separações, a EDO para $Z(z)$:

$$\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi}}_{\equiv -\mu} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} - \frac{\mu}{\rho^2}}_{\equiv -\lambda} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

e assim obtemos as três EDOs separadas:

$$\Phi'' + \mu\Phi(\varphi) = 0, \quad \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - \mu)R(\rho) = 0 \quad \text{e} \quad Z'' + \lambda Z(z) = 0. \quad (5.23)$$

É claro que para a parte Φ valem os mesmos resultados em (5.22), isto é,

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \gamma) \\ \Phi(0) = \Phi(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\gamma)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \Phi_m(\varphi) = \sin(m\pi\varphi/\gamma). \end{cases} \quad (5.24)$$

Já a EDO para R em (5.23) com μ substituído por $\mu_m = (m\pi/\gamma)^2$ produz uma EDO diferente para cada valor de m , devendo todas satisfazer a condição de fronteira $R(b) = 0$ herdada do problema original:

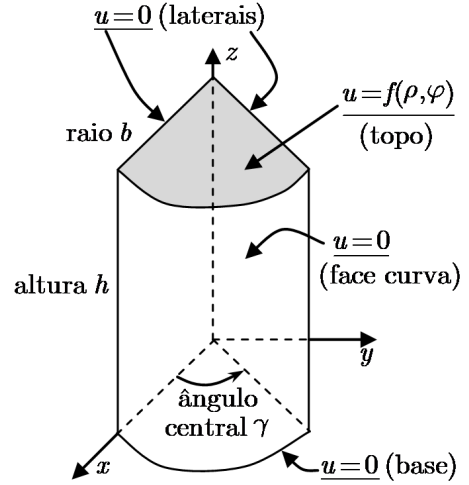
$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left[\lambda\rho^2 - \left(\frac{m\pi}{\gamma} \right)^2 \right] R(\rho) = 0, \quad \rho \in (0, b), \quad R(b) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.25)$$

Este é um problema de autovalor do tipo em (5.9) com $\nu = m\pi/\gamma$ para cada $m = 1, 2, \dots$, em que, no m -ésimo problema, buscam-se os autovalores λ_{mn} e as correspondentes autofunções $R_{mn}(\rho)$ (nessa notação com dois índices, n enumera os autovalores e autofunções do m -ésimo problema de autovalor); logo,

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2 \xleftarrow{n=1,2,3,\dots} R_{mn}(\rho) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right), \quad \text{onde} \quad \boxed{\zeta_{mn} \text{ é o } n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m\pi}{\gamma}}}.$$

Agora revolvemos a EDO para $Z(z)$ em (5.23) com λ substituído pelo resultado $\lambda = \lambda_{mn} = (\zeta_{mn}/b)^2$ acima e sob a condição $Z(0) = 0$ que se deduz da condição de fronteira $u(\rho, \varphi, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} Z'' - \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2 Z(z) &= 0, \quad z \in (0, h), \quad Z(0) = 0 \\ Z(z) &= c_1 \cosh(\zeta_{mn}z/b) + c_2 \sinh(\zeta_{mn}z/b) \\ Z(0) = 0 &\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow Z = Z_{mn}(z) = \sinh(\zeta_{mn}z/b). \end{aligned}$$



Podemos agora formar a solução geral $u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} B_{mn} R_{mn}(\rho) \Phi_m(\varphi) Z_{mn}(z)$, ou

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi\varphi}{\gamma} \right) \sinh \left(\frac{\zeta_{mn}z}{b} \right) . \quad (5.26)$$

Usando a condição de fronteira não homogênea, temos que

$$u(\rho, \varphi, h) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_{mn} \sinh \left(\frac{\zeta_{mn}h}{b} \right)}_{*} J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi\varphi}{\gamma} \right) .$$

Calculando os coeficientes (indicados pelo asterisco) dessa série dupla de Fourier generalizada usando (2.38) e (2.39), concluímos a solução do problema:

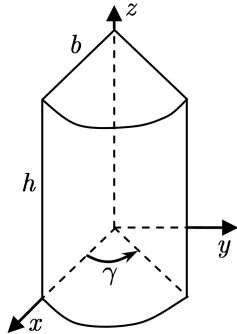
$$B_{mn} \sinh \left(\frac{\zeta_{mn}h}{b} \right) = \frac{\int_0^\gamma \int_0^b f(\rho, \varphi) J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right) \sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \rho d\rho d\varphi}{\|J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right)\|^2 \|\sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2} ,$$

onde

$$\|J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right)\|^2 = \int_0^b J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2 \left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b} \right) \rho d\rho$$

e

$$\|\sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2 = \int_0^\gamma \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\gamma} d\theta = \frac{\gamma}{2} .$$



Exemplo 5.2.6. Resolva a equação do calor no setor de tronco cilíndrico mostrado à esquerda, inicialmente à temperatura $T_0(\rho, \varphi, z)$ (coordenadas cilíndricas), sabendo que a base é isolada termicamente e as demais faces são mantidas em 0° .

A formulação desse problema é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(\rho, \varphi, z, t) \\ \rho \in (0, b), \varphi \in (0, \gamma), z \in (0, h), t > 0 \\ T(b, \varphi, z, t) = 0 \\ T(\rho, 0, z, t) = T(\rho, \gamma, z, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}(\rho, \varphi, 0, t) = T(\rho, \varphi, h, t) = 0 \\ T(\rho, \varphi, z, 0) = T_0(\rho, \varphi, z) \end{array} \right\} \text{ cond. front.} \quad (5.27)$$

Após a separação espaço-temporal $T(\rho, \varphi, z, t) = \psi(\rho, \varphi, z) \tau(t)$, o primeiro passo é resolver o seguinte problema de autovalor tridimensional formado pela equação de Helmholtz sob condições de fronteira semelhantes ao do problema de calor:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \lambda \psi(\rho, \varphi, z) = 0 \\ \rho \in (0, b), \varphi \in (0, \gamma), z \in (0, h) \\ \psi(b, \varphi, z) = 0 \\ \psi(\rho, 0, z) = \psi(\rho, \gamma, z) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(\rho, \varphi, 0) = \psi(\rho, \varphi, h) = 0 \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Fazendo $\psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ para separar as EDOs como de praxe, tendo em conta que haverá um problema de autovalor unidimensional para todas as partes R , Φ e Z ,

$$\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\beta} + \lambda = 0 ,$$

obtemos as seguintes EDOs separadas:

$$Z'' + \beta Z(z) = 0 , \quad \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0 , \quad \rho^2 R'' + \rho R' + [(\lambda - \beta)\rho^2 - \mu]R(\rho) = 0 .$$

Logo, considerando as condições de fronteira que as partes R , Φ e Z herdaram das condições de fronteira para $\psi(\rho, \varphi, z)$, formamos os três problemas de autovalor unidimensionais seguintes, cujas soluções podem ser prontamente escritas, pois já são conhecidas:

- Problema de autovalor na variável z :

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0 \\ \theta \in (0, h) , \quad Z'(0) = Z(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_l = (l\pi/h)^2 \quad (l = 1, 3, 5, \dots) \\ Z_l(z) = \cos(l\pi z/2h) . \end{cases}$$

- Problema de autovalor na variável φ :

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0 , \quad \varphi \in (0, \gamma) \\ \Phi(0) = \Phi(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/\gamma)^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \Phi_m(\varphi) = \sin(m\pi\varphi/\gamma) . \end{cases}$$

- Problema de autovalor na variável ρ :

Para formular esse problema, é necessário substituir na EDO para $R(\rho)$ os autovalores β_l e μ_m obtidos nos dois problemas de autovalor anteriores; ei-lo:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left\{ \left[\lambda - \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2 \right] \rho^2 - \left(\frac{m\pi}{\gamma} \right)^2 \right\} R(\rho) = 0 , \quad \rho \in (0, b) , \quad R(b) = 0 .$$

Esse é um problema de autovalor para cada par (l, m) (com $l = 1, 3, 5, \dots$ e $m = 1, 2, 3, \dots$) do tipo em (5.9), só tendo, portanto, solução $R(\rho) \neq 0$ se $\lambda - (l\pi/h)^2 = (\zeta_{mn}/b)^2$, onde ζ_{mn} ($n = 1, 2, \dots$) é o n -ésimo zero não nulo de $J_{\frac{m\pi}{\gamma}}$. Então os autovalores de λ e as respectivas autofunções são

$$\lambda = \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2 \xrightarrow{n=1,2,3,\dots} R(r) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}r}{b} \right) , \quad \text{onde } \zeta_{mn} \text{ é o } n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m\pi}{\gamma}} .$$

Enfim podemos apresentar os autovalores de λ e as autofunções do problema de autovalor tridimensional em (5.28):

$$\begin{cases} \lambda_{lmn} = \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2 \xrightarrow[m,n=1,2,3,\dots]{l=1,3,5,\dots} \psi_\lambda = \psi_{lmn}(\rho, \varphi, z) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}r}{b} \right) \sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h} \\ \text{onde } \boxed{\zeta_{mn} \text{ é o } n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m\pi}{\gamma}}} . \end{cases}$$

Segundo (3.23), a solução geral é $T(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{l,m,n} A_{lmn} e^{-\lambda_{lmn}\alpha t} \psi_{lmn}(\rho, \varphi, z)$, isto é,

$$\boxed{T(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{lmn} e^{-\lambda_{lmn}\alpha t} J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}r}{b} \right) \sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h}} .$$

Impondo a condição inicial, obtemos

$$T(\rho, \varphi, z, 0) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{lmn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn}r}{b} \right) \sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h} = T_0(\rho, \varphi, z) ,$$

donde, de acordo com (2.40) e (2.41), temos que

$$A_{lmn} = \frac{\int_0^h \int_0^\gamma \int_0^b T_0(\rho, \varphi, z) J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h} \rho d\rho d\varphi dz}{\|J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right)\|^2 \|\operatorname{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2 \|\cos \frac{l\pi z}{h}\|^2},$$

onde

$$\begin{aligned} \|J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right)\|^2 &= \int_0^b J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) \rho d\rho \\ \|\operatorname{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2 &= \int_0^\gamma \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi\varphi}{\gamma} d\varphi = \frac{\gamma}{2} \\ \|\cos \frac{l\pi z}{h}\|^2 &= \int_0^h \cos^2 \frac{l\pi z}{h} dz = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

— **Exemplo 5.2.7.** Resolva o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\rho, \varphi, z, t) \\ \rho \in (0, b), \quad \varphi \in (0, \gamma), \quad z \in (0, h), \quad t > 0 \\ u(b, \varphi, z, t) = 0 \\ u(\rho, 0, z, t) = u(\rho, \gamma, z, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(\rho, \varphi, 0, t) = u(\rho, \varphi, h, t) = 0 \\ u(\rho, \varphi, z, 0) = u_0(\rho, \varphi, z) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, z, 0) = v_0(\rho, \varphi, z) \end{array} \right\} \text{cond. front.} \quad (5.29)$$

Esse é um problema de onda no mesmo domínio espacial do problema de calor do Exemplo 5.2.6 e sob condições de fronteira semelhantes. Logo, de acordo com (3.24), a solução geral é $u(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{l,m,n} (A_{lmn} \cos \omega_{lmn} t + B_{lmn} \operatorname{sen} \omega_{lmn} t) \psi_{lmn}(\rho, \varphi, z)$ [$\omega_{lmn} = c\sqrt{\lambda_{lmn}}$], isto é,

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{lmn} \cos \omega_{lmn} t + B_{lmn} \operatorname{sen} \omega_{lmn} t) J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h}.$$

Impondo as condições iniciais, obtemos

$$u(\rho, \varphi, z, 0) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{lmn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h} = u_0(\rho, \varphi, z)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, z, 0) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{lmn} B_{lmn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h} = v_0(\rho, \varphi, z).$$

Logo,

$$A_{lmn} = \frac{\int_0^h \int_0^\gamma \int_0^b u_0(\rho, \varphi, z) \frac{J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) \sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h}}{\|J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right)\|^2 \|\sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2 \|\cos \frac{l\pi z}{h}\|^2} \rho d\rho d\varphi dz$$

e

$$\omega_{lmn} B_{lmn} = \frac{\int_0^h \int_0^\gamma \int_0^b v_0(\rho, \varphi, z) \frac{J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) \sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h}}{\|J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right)\|^2 \|\sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2 \|\cos \frac{l\pi z}{h}\|^2} \rho d\rho d\varphi dz,$$

onde

$$\|J_{\frac{m\pi}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right)\|^2 = \int_0^b J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) \rho d\rho$$

$$\|\sin \frac{m\pi\varphi}{\gamma}\|^2 = \int_0^\gamma \sin^2 \frac{m\pi\varphi}{\gamma} d\varphi = \frac{\gamma}{2}$$

$$\|\cos \frac{l\pi z}{h}\|^2 = \int_0^h \cos^2 \frac{l\pi z}{h} dz = \frac{h}{2}.$$

5.3 Exercícios

5.3.1 Enunciados

1] Resolva o seguinte problema em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \nabla^2 T(r, \theta, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & r \in (0, b), \theta \in (0, \pi), t > 0 \\ T(b, \theta, t) = 0, & \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, 0, t) = T(r, \pi, t) = 0, T(r, \theta, 0) = T_0(r, \theta) \end{cases}$$

2] Resolva o seguinte problema em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & \rho \in (0, b), \varphi \in \mathbb{R}, z \in (0, h) \\ u(b, \varphi, z) = f(\varphi, z), & u(\rho, \varphi, 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(\rho, \varphi, h) = 0 \end{cases}$$

3] Resolva o seguinte problema em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = 0, & \rho \in (0, b), \varphi \in \mathbb{R}, z \in (0, h) \\ u(b, \varphi, z) = 0, & u(\rho, \varphi, 0) = 0, u(\rho, \varphi, h) = f(\rho, \varphi) \end{cases}$$

4] Resolva o seguinte problema em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = 0, & \rho \in (0, b), \varphi \in (0, \gamma), z \in (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(b, \varphi, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0, z) = u(\rho, \gamma, z) = 0, u(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi). \end{cases}$$

5] Resolva o seguinte problema em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = 0, & \rho \in (a, \infty), \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, h) \\ u(a, \varphi, z) = f(\varphi, z), & u(\rho, 0, z) = u(\rho, \pi/2, z) = 0, u(\rho, \varphi, 0) = u(\rho, \varphi, h) = 0. \end{cases}$$

6] Calcule a solução T (temperatura) do seguinte problema de calor formulado nas coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & \rho \in (0, b), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, h), t \geq 0 \\ T|_{\rho=b} = \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = T|_{z=h} = 0 & \text{e} \quad T|_{t=0} = T_0(\rho, z). \end{cases}$$

7] Calcule a solução T (temperatura) do seguinte problema de calor formulado nas coordenadas polares:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & r \in (a, b), \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad t \geq 0 \\ T|_{r=a} = T|_{r=b} = 0 & \text{e} \quad T|_{t=0} = T_0(r). \end{cases}$$

5.3.2 Soluções

1

$$T(r, \theta, t) \equiv \psi(r, \theta)\tau(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0 \\ \tau' + \lambda \alpha \tau(t) = 0. \end{cases}$$

$$\nabla^2 \psi + \lambda \psi(r, \theta) = 0, \quad r \in (0, b), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, 0) = \psi(r, \pi) = 0.$$

$$\nabla^2 \psi + \lambda \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \lambda \psi = 0 \xrightarrow{\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)} \frac{R'' + (1/r)R'}{R} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\mu} + \lambda = 0.$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu \Theta(\theta) = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = \left(\frac{m\pi}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \\ \Theta_m(\theta) = \cos \frac{m\theta}{2}. \end{cases}$$

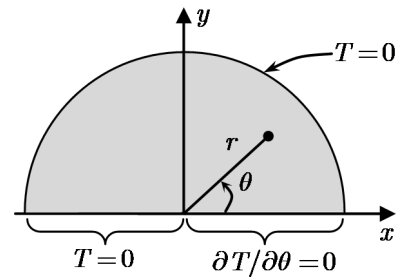
$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - \underbrace{\mu_m}_{(m/2)^2})R(r) = 0, \quad r \in (0, b), \quad R(b) = 0.$$

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\zeta_{mn}}{b}\right)^2 \xrightarrow{n=1,2,3,\dots} R_{mn}(r) = J_{\frac{m}{2}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \quad [\zeta_{mn} : n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m}{2}}].$$

$$T(r, \theta, t) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\lambda_{mn}\alpha t} J_{\frac{m}{2}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \cos \frac{m\theta}{2} \blacksquare$$

$$T(r, \theta, 0) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_{\frac{m}{2}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \cos \frac{m\theta}{2} = T_0(r, \theta).$$

$$A_{mn} = \frac{\int_0^\pi \int_0^b T_0(r, \theta) J_{\frac{m}{2}}\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) \cos \frac{m\theta}{2} r dr d\theta}{\int_0^b J_{\frac{m}{2}}^2\left(\frac{\zeta_{mn}r}{b}\right) r dr \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \frac{m\theta}{2} d\theta}_{\pi/2}} \blacksquare$$



2

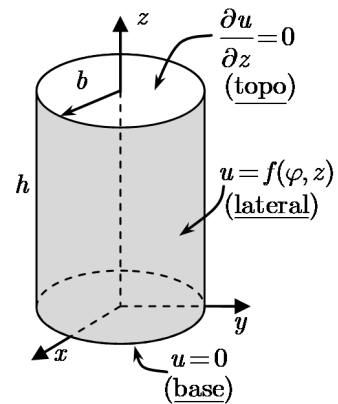
$$\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\xrightarrow{u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)} \frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\beta} = 0.$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0 \\ \varphi \in \mathbb{R} \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = \left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2 = m^2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ \Phi_m(\varphi) = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi \\ (b_0 = 0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0, \quad z \in (0, h) \\ Z(0) = Z'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_l = (l\pi/2h)^2 \quad (l = 1, 3, 5, \dots) \\ Z(z) = \cos(l\pi z/2h). \end{cases}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \left(\underbrace{\beta_l}_{\left(\frac{l\pi}{2h}\right)^2} \rho^2 + \underbrace{\mu_m}_{m^2}\right)R(\rho) = 0 \Rightarrow R(\rho) = R_{lm}(\rho) = c_{lm} I_m\left(\frac{l\pi\rho}{2h}\right) + \underbrace{d_{lm}}_{0(*)} K_m\left(\frac{l\pi\rho}{2h}\right)$$



(*) $d_{lm} = 0$ para evitar infinitude quando $\rho \rightarrow 0$, uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} K_m(x) = \infty$.

$$u_{lm}(\rho, \varphi, z) = R_{lm}(\rho) \Phi_m(\varphi) Z_l(z) = c_{lm} I_m\left(\frac{l\pi\rho}{2h}\right) (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) \cos \frac{l\pi z}{2h}.$$

Denotando $c_{lm}a_m \equiv A_{lm}$ e $c_{lm}b_m \equiv B_{lm}$:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=0}^{\infty} I_m\left(\frac{l\pi\rho}{2h}\right) (A_{lm} \cos m\varphi + B_{lm} \sin m\varphi) \cos \frac{l\pi z}{2h} \quad (B_{l0} = 0) \quad \blacksquare$$

$$u(b, \varphi, z) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{m=0}^{\infty} I_m\left(\frac{l\pi b}{2h}\right) (A_{lm} \cos m\varphi + B_{lm} \sin m\varphi) \cos \frac{l\pi z}{2h} = f(\varphi, z)$$

$$I_m\left(\frac{l\pi b}{2h}\right) A_{lm} = \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} f(\varphi, z) \cos m\varphi \cos \frac{l\pi z}{2h} d\varphi dz}{\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi}_{\substack{\pi \text{ se } m \neq 0 \\ 2\pi \text{ se } m = 0}} \underbrace{\int_0^h \cos^2 \frac{l\pi z}{2h} dz}_{h/2}} \quad \blacksquare$$

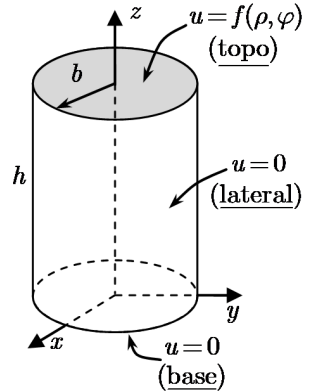
$$I_m\left(\frac{l\pi b}{2h}\right) B_{lm} \Big|_{m \geq 1} = \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} f(\varphi, z) \sin m\varphi \cos \frac{l\pi z}{2h} d\varphi dz}{\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi}_{\pi} \underbrace{\int_0^h \cos^2 \frac{l\pi z}{2h} dz}_{h/2}} \quad \blacksquare$$

3

$$\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \xrightarrow{u(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)}$$

$$\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-\mu} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R}}_{-\lambda} - \frac{\mu}{\rho^2} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0 \\ \varphi \in \mathbb{R} \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu_m = \left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2 = m^2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ \Phi(\varphi) = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi \\ (b_0 = 0). \end{cases}$$



$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - (\lambda \rho^2 - \underbrace{\mu_m}_{m^2}) R(\rho) = 0 \\ \rho \in (0, b), \quad R(b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \zeta_{mn} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) : n\text{-ésimo zero positivo de } J_m \\ \text{autovalores de } \lambda : \lambda_{mn} = \left(\frac{\zeta_{mn}}{b}\right)^2 \\ R_{mn}(\rho) = J_m\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right). \end{cases}$$

$$Z'' - \underbrace{\lambda_{mn}}_{\left(\frac{\zeta_{mn}}{b}\right)^2} Z(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = Z_{mn}(z) = c_{mn} \cosh \frac{\zeta_{mn}z}{b} + d_{mn} \sinh \frac{\zeta_{mn}z}{b}.$$

$$Z_{mn}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{mn} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{mn}(z) = d_{mn} \sinh \frac{\zeta_{mn}z}{b}.$$

$$u_{mn}(\rho, \varphi, z) = R_{mn}(\rho) \Phi_m(\varphi) Z_{mn}(z) = J_m\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) d_{mn} \sinh \frac{\zeta_{mn}z}{b}.$$

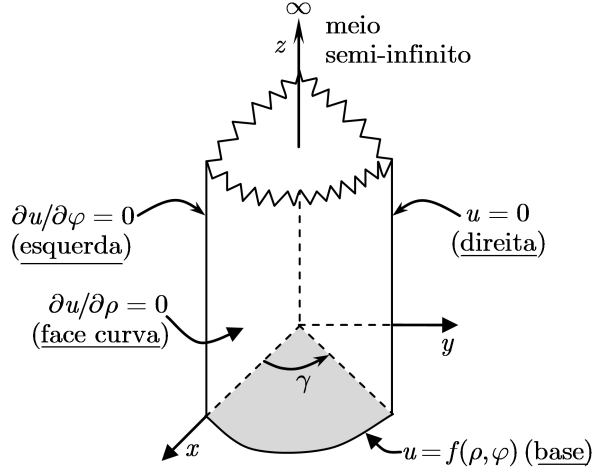
Denotando $a_m d_{mn} \equiv A_{mn}$ e $b_m d_{mn} \equiv B_{mn}$:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \sinh \frac{\zeta_{mn}z}{b} \quad (B_{0n} = 0) \quad \blacksquare$$

$$u(\rho, \varphi, h) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\zeta_{mn}\rho}{b}\right) (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \sinh \frac{\zeta_{mn}h}{b} = f(\rho, \varphi).$$

$$A_{mn} \sinh \frac{\zeta_{mn} h}{b} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^b f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \cos m\varphi \rho d\rho d\varphi}{\int_0^b J_m^2 \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi}_{\begin{cases} \pi & \text{se } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = 0 \end{cases}}} \quad \blacksquare$$

$$B_{mn} \sinh \frac{\zeta_{mn} h}{b} \Big|_{m \geq 1} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^b f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \sin m\varphi \rho d\rho d\varphi}{\int_0^b J_m^2 \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi}_{\pi}} \quad \blacksquare$$



$$\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \xrightarrow{u(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)}$$

$$\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi}}_{-\mu} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R}}_{-\lambda} - \frac{\mu}{\rho^2} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0, & \varphi \in (0, \gamma) \\ \Phi'(0) = \Phi(\gamma) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu_m = (m\pi/2\gamma)^2 & (m = 1, 3, 5, \dots) \\ \Phi_m(\varphi) = \cos(m\pi\varphi/2\gamma) \end{cases}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left[\lambda \rho^2 - \left(\frac{m\pi}{2\gamma} \right)^2 \right] R(\rho) = 0, \quad \rho \in (0, b), \quad R'(b) = 0.$$

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2 \xleftarrow{n=1,2,3,\dots} R_{mn}(\rho) = J_{\frac{m\pi}{2\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right), \quad \text{onde } \boxed{\zeta_{mn} \text{ é o } n\text{-ésimo zero positivo de } J'_{\frac{m\pi}{2\gamma}}}.$$

$$Z'' - \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2 Z(z) = 0, \quad z \in (0, \infty) \quad \Rightarrow \quad Z = Z_{mn}(z) = A_{mn} e^{-\zeta_{mn} z/b} + B_{mn} e^{\zeta_{mn} z/b}.$$

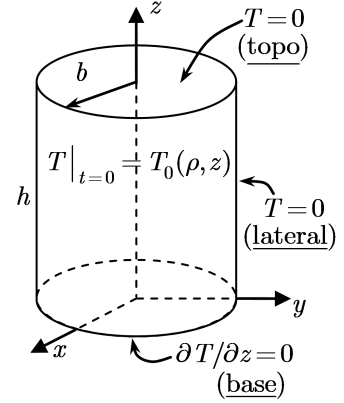
$$Z_{mn}(z \rightarrow \infty) \text{ finito} \quad \Rightarrow \quad B_{mn} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = Z_{mn}(z) = A_{mn} e^{-\zeta_{mn} z/b}.$$

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\zeta_{mn} z/b} J_{\frac{m\pi}{2\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} \quad \blacksquare$$

$$u(\rho, \varphi, 0) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_{\frac{m\pi}{2\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} = f(\rho, \varphi)$$

$$A_{mn} = \frac{\int_0^\pi \int_0^b f(\rho, \varphi) J_{\frac{m\pi}{2\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} \rho d\rho d\varphi}{\int_0^b J_{\frac{m\pi}{2\gamma}}^2 \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \rho d\rho \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} d\varphi}_{\pi/2}} \quad \blacksquare$$

Este problema está ilustrado à direita. O fato de a temperatura inicial $T_0(\rho, z)$ não depender da coordenada angular φ e a existência de simetria na geometria do problema em relação a essa coordenada acarretam uma solução que também não depende de φ : $T(\rho, z, t)$. Note que este problema é o do Exemplo 5.2.6, mas com a temperatura inicial mais simples, $T_0(\rho, z)$, e a geometria mais simétrica do presente problema. O cálculo da solução $T(\rho, z, t)$ deste problema é, portanto, mais simples por causa da ausência do termo $(\partial^2 T / \partial \varphi^2) / \rho^2$ no laplaciano em coordenadas cilíndricas; observe:



$$T(\rho, z, t) = \psi(\rho, z) \tau(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda.$$

$$\tau'' + \lambda \alpha \tau(t) = 0 \Rightarrow \tau(t) = c_1 e^{-\lambda \alpha t}.$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(\rho, z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \lambda \psi(\rho, z) = 0 \\ \psi(\rho, \varphi, z) \text{ sob as mesmas condições de fronteira que } T(\rho, z, t). \end{cases}$$

$$\psi(\rho, z) = R(\rho)Z(z) \Rightarrow \frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \underbrace{Z''/Z}_{-\beta} + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0 \\ \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda - \beta)R(\rho) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z(z) = 0, \quad z \in (0, h) \\ Z'(0) = Z(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_l = (l\pi/h)^2 \quad (l = 1, 3, 5, \dots) \\ Z_l(z) = \cos(l\pi z/2h). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + \left[\lambda - \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2 \right] \rho^2 R(\rho) = 0 \\ \rho \in (0, b) : R(b) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - (l\pi/h)^2 = (\zeta_{mn}/b)^2 \\ R(r) = J_{\frac{m\pi}{\gamma}}(\zeta_{mn}\rho/b) \\ \zeta_{mn} : n\text{-ésimo zero positivo de } J_{\frac{m\pi}{\gamma}}. \end{cases}$$

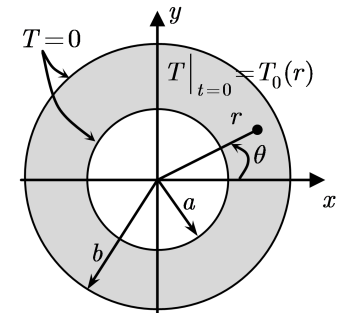
$$\tau_{ln}(t) = A_{ln} e^{-\lambda_{ln} \alpha t}, \quad \text{onde } \lambda_{ln} = \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_{mn}}{b} \right)^2.$$

$$T(\rho, z, t) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ln} e^{-\lambda_{mn} \alpha t} J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \cos \frac{l\pi z}{h}.$$

$$T(\rho, z, 0) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \sum_{n=1}^{\infty} A_{lmn} J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \sin \frac{m\pi \varphi}{\gamma} \cos \frac{l\pi z}{h} = T_0(\rho, z).$$

$$A_{ln} = \frac{\int_0^h \int_0^b T_0(\rho, z) J_{\frac{m\pi}{\gamma}} \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \cos \frac{l\pi z}{h} \rho d\rho dz}{\int_0^b J_{\frac{m\pi}{\gamma}}^2 \left(\frac{\zeta_{mn} \rho}{b} \right) \rho d\rho \int_0^h \cos^2 \frac{l\pi z}{h} dz}.$$

Este problema consiste no cálculo da temperatura T em coordenadas polares na placa em forma de arruela ilustrada à direita. Como no Exercício 6, a independência da temperatura inicial $T_0(r)$ da coordenada angular θ e a simetria geométrica implicam uma solução $T(r, t)$ (independente de θ). Logo,



$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}}_{=0} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \quad \xrightarrow{T(r,t) = R(r)\tau(t)}$$

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{\tau''}{\tau} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} \tau' + \lambda \alpha \tau(t) = 0 \Rightarrow \tau(t) = c_1 e^{-\lambda \alpha t} \\ r^2 R'' + r R' + \lambda r^2 R(r) = 0. \end{cases}$$

Essa EDO radial e as condições de fronteira para $R(r)$ que decorrem das condições de fronteira originais, $T(a, t) = T(b, t) = 0$, formam o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' + \lambda r^2 R(r) = 0, & r \in (a, b) \\ R(a) = R(b) = 0 & \text{(condições de Dirichlet)}, \end{cases}$$

cuja solução é como segue:

Para $\lambda = 0$: $R(r) = c_1 + c_2 \ln r$

$$\left. \begin{aligned} R(a) &= c_1 + c_2 \ln a = 0 \\ R(b) &= c_1 + c_2 \ln b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow R(r) \equiv 0 : \text{ não há o autovalor nulo.}$$

Para $\lambda < 0 : \lambda \equiv -k^2 (k > 0)$: $R(r) = c_1 I_0(kr) + c_2 K_0(kr)$

$$\left. \begin{aligned} R(a) &= c_1 I_0(ka) + c_2 K_0(ka) = 0 \\ R(b) &= c_1 I_0(kb) + c_2 K_0(kb) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow R(r) \equiv 0 : \text{ não há autovalor negativo,}$$

pois demonstra-se que $\begin{vmatrix} I_0(ka) & K_0(ka) \\ I_0(kb) & K_0(kb) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall k > 0$.

Para $\lambda > 0 : \lambda \equiv k^2 (k > 0)$: $R(r) = c_1 J_0(kr) + c_2 N_0(kr)$

Neste caso, o sistema algébrico formado pelas equações provenientes da imposição das condições de fronteira $R(a) = R(b) = 0$,

$$\star \begin{cases} R(a) &= c_1 J_0(ka) + c_2 N_0(ka) &= 0 \\ R(b) &= c_1 J_0(kb) + c_2 N_0(kb) &= 0, \end{cases}$$

admite valores de c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, porque o determinante dos coeficientes se anula para uma infinidade de valores k_n ($n = 1, 2, 3 \dots$) de k :

$$\begin{vmatrix} J_0(ka) & N_0(ka) \\ J_0(kb) & N_0(kb) \end{vmatrix} = J_0(ka)N_0(kb) - J_0(kb)N_0(ka) = 0 \Rightarrow k = k_n.$$

Portanto, ao autovalor $\lambda_n = k_n^2$ corresponde a autofunção $R_n(r) = c_{1n} J_0(k_n r) + c_{2n} N_0(k_n r)$. Nesta expressão, c_{1n} e c_{2n} não são constantes independentes, pois estão relacionadas pelas duas equações do sistema algébrico \star com $k = k_n$. Como essas duas equações são equivalentes (uma é múltipla da outra pelo fato de o determinante dos coeficientes se anular), podemos usar qualquer das duas para expressar uma delas em termo da outra: Da primeira equação, $c_{1n} J_0(k_n a) + c_{2n} N_0(k_n a) = 0$, tiramos $c_{2n} = -c_{1n} J_0(k_n a) / N_0(k_n a)$ para eliminar c_{2n} , obtendo a seguinte expressão para $R_n(r)$:

$$\begin{aligned} R_n(r) &= c_{1n} J_0(k_n r) + c_{2n} N_0(k_n r) = c_{1n} J_0(k_n r) - c_{1n} \frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)} N_0(k_n r) \\ &= \underbrace{\left[\frac{c_{1n}}{N_0(k_n a)} \right]}_{\text{constante}} [J_0(k_n r) N_0(k_n a) - J_0(k_n a) N_0(k_n r)]. \end{aligned}$$

Em resumo, os autovalores de λ e as respectivas autofunções são

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_n = k_n^2 &\xleftrightarrow{n=1,2,3\cdots} R_n(r) = J_0(k_n r) N_0(k_n a) - J_0(k_n a) N_0(k_n r) \\ [k_n \text{ é a } n\text{-ésima raiz positiva da equação } J_0(ka) N_0(kb) - J_0(kb) N_0(ka) = 0] \end{aligned}} \blacksquare$$

Agora concluímos rapidamente a solução do problema:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(r) e^{-\lambda_n \alpha t} \blacksquare$$

$$T(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(r) = T_0(r) \Rightarrow A_n = \frac{\int_a^b T_0(r) R_n(r) r dr}{\int_a^b R_n^2(r) r dr} \blacksquare$$

Capítulo 6

A Série de Legendre e sua Aplicação na Resolução de EDPs

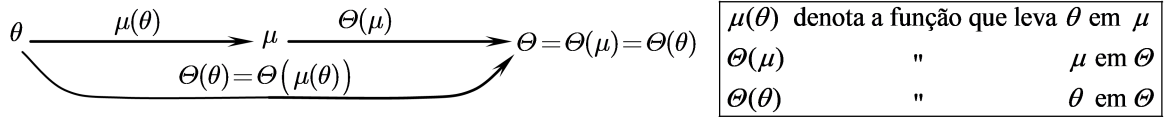
- Ref. [5], seq. 12.10
- Ref. [8], seq. 11.5.2 e 13.3
- Ref. [6], cap. 7

6.1 Polinômios de Legendre como Autofunções

Nosso objetivo aqui é resolver problemas de autovalor formados com a EDO

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta(\theta) = 0, \quad (6.1)$$

que surge na separação de variáveis das equações do calor, da onda e de Laplace nas coordenadas esféricas (r , θ e φ) sob as condições de fronteira mais corriqueiras [neste momento, é instrutivo ler, na página 112, o início da solução do Exemplo 6.2.1, até a equação (6.30)]. Para reconhecer que EDO é essa, vamos transformá-la efetuando a mudança de variável $\mu = \cos \theta$. Denotaremos as funções envolvidas nessa transformação como mostra o esquema da composição de funções que ocorre nela:



Eis os cálculos (basicamente o emprego da regra da cadeia):

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\theta} &= \frac{d\Theta}{d\mu} \underbrace{\frac{d\mu}{d\theta}}_{-\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = - \underbrace{\sin^2 \theta}_{1-\mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= - \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] \underbrace{\frac{d\mu}{d\theta}}_{-\sin \theta} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right]. \end{aligned}$$

Assim se transforma o primeiro termo da equação (6.1), a qual, com a substituição desse resultado, toma a nova forma desejada:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \lambda \Theta(\mu) = 0, \quad (6.2)$$

ou, efetuando a derivada do produto,

$$(1-\mu^2)\Theta'' - 2\mu\Theta' + \lambda\Theta(\mu) = 0. \quad (6.3)$$

Ora, essa EDO, de acordo com (4.15), é a equação de Legendre, cuja solução já foi calculada na seção 4.2.1. A forma da equação (6.2) é a de Sturm-Liouville, (2.24), com as funções u , v e w dadas por

$$u(\mu) = 1 - \mu^2, \quad v(\mu) = 0 \quad \text{e} \quad w(\mu) = 1. \quad (6.4)$$

Multiplicando a equação (6.1) por $\sin\theta$, obtemos

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin\theta) \Theta(\theta) = 0, \quad (6.5)$$

que é a forma de Sturm-Liouville da equação de Legendre na variável θ ; comparando-a com (2.24), vemos que

$$u(\theta) = \sin\theta, \quad v(\theta) = 0 \quad \text{e} \quad w(\theta) = 1. \quad (6.6)$$

Uma vez identificada a equação (6.1) como uma EDO que já sabemos resolver, passamos a discutir os problemas de autovalor formados com ela, buscando os autovalores do parâmetro λ aos quais correspondam soluções não nulas que satisfaçam a condição de finitude ou alguma outra porventura especificada. Tendo em conta que usaremos as coordenadas esféricas para resolver problemas definidos tanto em esferas quanto semiesferas, será necessário buscar as soluções da EDO (6.1) tanto para $\theta \in (0, \pi)$ quanto $\theta \in (0, \pi/2)$. Consideramos a seguir um problema de autovalor que ocorre numa esfera e dois que ocorrem numa semiesfera.

Problema de autovalor (i)

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin\theta) \Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (6.7)$$

Este problema ocorre quando o domínio espacial da EDP é uma *esfera*. Trata-se de um problema de Sturm-Liouville com condição de fronteira do tipo CF-4 em (2.27), pois, nos pontos extremos do intervalo $(0, \pi)$ considerado neste problema de autovalor, temos, de acordo com (6.6), que $u(\theta) = \sin\theta \rightarrow 0$ quando $\theta \rightarrow 0^+$ e $\theta \rightarrow \pi^-$.

Vamos escrever o problema (6.7) na variável μ . Nessa variável, a EDO é dada por (6.2) ou (6.3), e o problema (6.7) toma a forma

$$(1 - \mu^2) \Theta'' - 2\mu \Theta' + \lambda \Theta(\mu) = 0, \quad \mu \in (-1, 1). \quad (6.8)$$

Obviamente, este é um problema de Sturm-Liouville equivalente àquele em (6.7). Note que, em vista de (6.4), a condição CF-4 continua sendo satisfeita: $u(\mu) = 1 - \mu^2 \rightarrow 0$ pelas laterais dos pontos extremos $\mu = \pm 1$ do intervalo $(-1, 1)$.

Vejamos os principais resultados deste problema de autovalor (i):

a) Autovalores e Autofunções

Foi exatamente o problema de autovalor em (6.8) que estudamos na seção 4.2.1; veja-o em (4.15). No resumo ao final dessa seção, vemos lá listados os autovalores e as autofunções, que repetimos aqui:

$$\begin{aligned} \text{autovalores } \lambda_l = l(l+1) & \xleftrightarrow{l=0,1,2,3,\dots} \text{ autofunções } \Theta_l(\mu) = P_l(\mu) \\ & \text{ou } \Theta_l(\theta) = P_l(\cos\theta), \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde $P_l(\mu)$ são os *polinômios de Legendre* (ou *funções de Legendre de 1ª espécie*) descritos na seção 4.2.2. Podemos dizer que $\Theta_l(\mu) = P_l(\mu)$ são as autofunções do problema (6.8) e $\Theta_l(\theta) = P_l(\cos\theta)$ são as do problema (6.7).

b) Relação de Ortogonalidade

Como em (6.2) $w(\mu) = 1$, temos que os polinômios de Legendre $P_l(\mu)$ são ortogonais com respeito a uma função peso unitária:

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) P_m(\mu) d\mu = 0 \quad \text{se } l \neq m. \quad (6.10)$$

Por sua vez, os polinômios de Legendre com argumento $\cos\theta$, isto é, $P_l(\cos\theta)$, são ortogonais com respeito à função peso $w(\theta) = \sin\theta$ dada em (6.6):

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 0 \quad \text{se } l \neq m, \quad (6.11)$$

resultado que também se obtém efetuando-se a mudança de variável $\mu = \cos \theta$ na integral em (6.10).

Na verdade, os resultados expressos na variável θ podem ser todos obtidos sem considerá-los como consequências do problema de Sturm-Liouville em (6.7), bastando deduzir os resultados na variável μ resolvendo o problema de Sturm-Liouville em (6.8) e então expressá-los na variável θ por meio da mudança de variável $\mu = \cos \theta$. Mas é instrutivo continuar considerando simultaneamente os problemas de Sturm-Liouville em (6.7) e (6.8). Por outro lado, são especificamente os resultados na variável θ que nos interessarão quando resolvermos EDPs mais adiante, o que justificaria obtê-los considerando tão somente o problema (6.7). Mas, como os resultados na variável μ são amplamente divulgados por serem importantes em muitas aplicações, prosseguiremos nesse caminho duplo.

c) Normas Quadráticas

De acordo com (4.27),

$$\|P_l(\mu)\|^2 = \int_{-1}^1 P_l^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2l+1} ; \quad (6.12)$$

logo,

$$\|P_l(\cos \theta)\|^2 = \int_0^\pi P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} . \quad (6.13)$$

d) Série de Fourier Generalizada

Associada às autofunções do problema (6.8) temos a seguinte série de Fourier generalizada de uma função $f(\mu)$, obtida usando-se a fórmula na equação (2.17):

$$f(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\mu) , \quad (6.14)$$

com

$$A_l = \frac{\langle P_l, f \rangle}{\|P_l(\mu)\|^2} = \frac{\int_{-1}^1 f(\mu) P_l(\mu) d\mu}{\underbrace{\int_{-1}^1 P_l^2(\mu) d\mu}_{2/(2l+1)}} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_l(\mu) d\mu . \quad (6.15)$$

Esta é a chamada *série de Fourier-Legendre*, ou, simplesmente, série de Legendre.

Similarmente, considerando o problema (6.8), temos

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) , \quad (6.16)$$

com

$$A_l = \frac{\langle P_l(\cos \theta), f \rangle(\theta)}{\|P_l(\cos \theta)\|^2} = \frac{\int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\underbrace{\int_0^\pi P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{2/(2l+1)}} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta . \quad (6.17)$$

Problema de autovalor (ii)

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin \theta) \Theta(\theta) = 0 , \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) , \quad \text{com} \quad \begin{cases} \Theta(\pi/2) = 0 \rightarrow \text{prob. (ii-1)} \\ \text{ou} \\ \Theta'(\pi/2) = 0 \rightarrow \text{prob. (ii-2)} \end{cases} \quad (6.18)$$

[Note que agora estamos agindo em conformidade com o primeiro parágrafo após (2.27): não explicitamos os limites laterais nas condições de fronteira acima, isto é, não escrevemos $\Theta(\pi/2^-) = 0$ e $\Theta'(\pi/2^-) = 0$].

Em (6.18) temos dois problemas de autovalor – a que faremos referência por (ii-1) e (ii-2) – que ocorrem quando o domínio espacial da EDP é uma *semiesfera*, que diferem quanto à condição imposta no ponto $\theta = \pi/2$ (correspondente à base da semiesfera): no prob. (ii-1), temos a condição de Dirichlet $\Theta(\pi/2) = 0$ e, no prob. (ii-2), a de Neumann $\Theta'(\pi/2) = 0$. No outro ponto extremo desse intervalo, $\theta = 0$, ambos os problemas apresentam uma condição CF-4 (supressiva). São, portanto, dois problemas com condição de fronteira mista (i.e., do tipo CF-5).

Na variável μ , (6.18) toma a forma

$$(1 - \mu^2)\Theta'' - 2\mu\Theta' + \lambda\Theta(\mu) = 0, \quad \mu \in (0, 1), \text{ com } \begin{cases} \Theta(0) = 0 \rightarrow \text{prob. (ii-1)} \\ \text{ou} \\ \Theta'(0) = 0 \rightarrow \text{prob. (ii-2)} \end{cases} \quad (6.19)$$

Estes também são, obviamente, problemas de condição de fronteira mista: uma condição de Dirichlet [prob. (ii-1)] ou Neumann [prob. (ii-2)] no extremo $\mu = 0$ do intervalo $(0, 1)$ e uma condição supressiva no extremo em $\mu = 1$ (ponto em que $1 - \mu^2$ se anula).

a) Autovalores e Autofunções

Naturalmente, as autofunções $\Theta_l(\mu)$ ainda são polinômios de Legendre $P_l(\mu)$, mas nem todos esses são autofunções. No caso do prob. (ii-1), são autofunções apenas os polinômios de Legendre *ímpares*, porque satisfazem a condição $\Theta(0) = 0$ (a de o gráfico passar pela origem, algo que acontece com as funções ímpares contínuas). Já no caso do prob. (ii-2), são autofunções apenas os polinômios de Legendre *pares*, que satisfazem a condição $\Theta'(0) = 0$ (derivada nula na origem, algo característico das funções pares diferenciáveis). Resumindo:

$$\begin{array}{l} \text{autovalores } \lambda_l = l(l+1) \longleftrightarrow \text{autofunções } \Theta_l(\mu) = P_l(\mu) \text{ ou } \Theta_l(\theta) = P_l(\cos \theta), \\ \text{onde } \begin{cases} l = 1, 3, 5, \dots \text{ no prob. (ii-1)} \\ l = 0, 2, 4, \dots \text{ no prob. (ii-2)} \end{cases} \end{array} \quad (6.20)$$

b) Relação de Ortogonalidade

Tal relação é aquela em (6.10) ou (6.11), mas, agora, com o intervalo de integração restrito a $\mu \in [0, 1]$ ou $\theta \in [0, \pi/2]$ em ambos os problemas (ii-1) e (ii-2):

$$\int_0^1 P_l(\mu)P_m(\mu)d\mu = 0 \text{ se } l \neq m, \quad (6.21)$$

$$\int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta)P_m(\cos \theta)\sin \theta d\theta = 0 \text{ se } l \neq m. \quad (6.22)$$

c) Normas Quadráticas

Usando (6.12), temos que

$$\|P_l(\cos \theta)\|^2 = \|P_l(\mu)\|^2 = \int_0^1 P_l^2(\mu)d\mu = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-1}^1 P_l^2(\mu)d\mu}_{2/(2l+1)} = \frac{1}{2l+1}. \quad (6.23)$$

d) Série de Fourier Generalizada

Na variável μ , a série de Fourier generalizada de uma função $f(\mu)$, de acordo com (2.17), é

$$f(\mu) = \underbrace{\sum_{l=1,3,5,\dots} A_l P_l(\mu)}_{\text{prob. (ii-1)}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{l=0,2,4,\dots} A_l P_l(\mu)}_{\text{prob. (ii-2)}}, \quad (6.24)$$

nas quais, em ambos os problemas, os coeficientes são dados por

$$A_l = \frac{\langle P_l(\mu), f(\mu) \rangle}{\|P_l(\mu)\|^2} = (2l+1) \int_0^1 f(\mu)P_l(\mu)d\mu. \quad (6.25)$$

Em (6.24) temos as chamadas série de Legendre ímpar e série de Legendre par.
Na variável θ , temos

$$f(\theta) = \underbrace{\sum_{l=1,3,5,\dots} A_l P_l(\cos \theta)}_{\text{prob. (ii-1)}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{l=0,2,4,\dots} A_l P_l(\cos \theta)}_{\text{prob. (ii-2)}} , \quad (6.26)$$

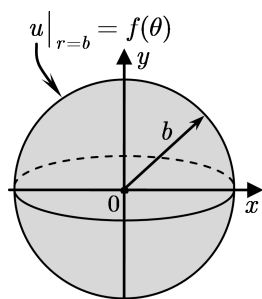
onde, para ambas as séries, os coeficientes são dados por

$$A_l = \frac{\langle P_l(\cos \theta), f(\theta) \rangle}{||P_l(\cos \theta)||^2} = (2l+1) \int_0^{\pi/2} f(\theta) P_l(\cos \theta) d\theta . \quad (6.27)$$

Enfim, ressalte-se que as funções de Legendre de 2ª espécie $Q_l(\mu)$ são singulares nos pontos $\mu = \pm 1$, i.e., em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, que são respectivamente as colatitudes dos polos norte e sul de uma esfera. Como um ou ambos os polos sempre estarão nos domínios espaciais das EDPs que resolvermos usando as coordenadas esféricas, sempre descartaremos essas funções para evitar soluções infinitas.

6.2 Aplicação da Série de Legendre na Resolução da Equação de Laplace

—— **Exemplo 6.2.1.** Cálculo da solução da equação de Laplace $\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$ (coordenadas esféricas) numa esfera de raio b centrada na origem sob a condição de fronteira $u(b, \theta, \varphi) = f(\theta)$.



Note que a condição de fronteira $u(b, \theta, \varphi) = f(\theta)$ [menos genérica que a condição $u(b, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$] não depende do ângulo longitudinal φ ; a solução, portanto, também deve independe desse ângulo: $u = u(r, \theta)$. Já desprezando, no laplaciano, o termo contendo a derivada parcial em relação a φ , podemos escrever a formulação do problema como segue:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \\ r \in [0, b], \quad \theta \in [0, \pi], \quad u(b, \theta) = f(\theta) . \end{cases} \quad (6.28)$$

Com a substituição de $u(r, \theta) \equiv R(r) \Theta(\theta)$ na equação de Laplace, separamos duas EDOs:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) \Theta + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \\ & \Rightarrow \quad \frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} + \underbrace{\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}_{-\lambda} = 0 \\ & \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin \theta) \Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi] \dots \dots \dots \text{EDO angular} & (6.29) \\ r^2 R'' + 2rR' - \lambda R(r) = 0, \quad r \in [0, b] \dots \dots \dots \text{EDO radial} & (6.30) \end{cases} \end{aligned}$$

Separamos a EDO angular usando a constante $(-\lambda)$ em conformidade com a nota emitida após a equação (3.32), pois a sua resolução com $\theta \in [0, \pi]$ constitui um problema de Sturm-Liouville: exatamente aquele na equação (6.7), cujos autovalores e autofunções, como vimos, são

$$\lambda = \lambda_l = l(l+1) \quad \xleftarrow{l=0,1,2,\dots} \quad \Theta_l(\theta) = P_l(\cos \theta) . \quad (6.31)$$

Substituindo $\lambda = \lambda_l = l(l+1)$ na EDO radial (uma equação de Euler-Cauchy) e resolvendo-a, obtemos

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = R_l(r) = A_l r^l + B_l / r^{l+1} . \quad (6.32)$$

Podemos agora formar a solução geral $u(r, \theta) = \sum_l R_l(r) \Theta_l(\theta)$, resultado que realçamos abaixo:

Eis a solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas em problemas com simetria longitudinal (independência da coordenada φ) numa esfera centrada na origem:

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) . \quad (6.33)$$

No problema sendo resolvido, devemos fazer $B_l = 0$ para evitar que a solução tenda a infinito quando $r \rightarrow 0$; assim,

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \blacksquare$$

Para determinar A_l , exigimos que a solução satisfaça a condição de fronteira não homogênea:

$$u(b, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l b^l P_l(\cos \theta) = f(\theta) .$$

Essa equação mostra que $A_l b^l$ são os coeficientes da série de Legendre de $f(\theta)$ descrita por (6.16) e (6.17):

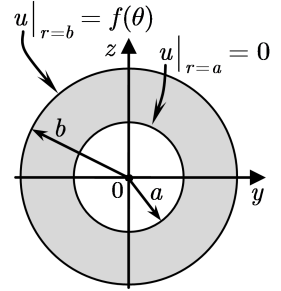
$$A_l b^l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad A_l = \frac{2l+1}{2b^l} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad \blacksquare$$

A solução é formada pelas duas equações finalizadas com um quadrado negro.

— **Exemplo 6.2.2.** Cálculo da solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace na região entre duas superfícies esféricas centradas na origem e de raios a e b ($a < b$) sob as condições de fronteira $u(a, \theta) = 0$ e $u(b, \theta) = f(\theta)$.

Como as condições de fronteira não dependem da longitude φ , a solução geral é aquela dada na equação (6.33):

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) .$$



Vamos impor primeiramente condição de fronteira homogênea:

$$u(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_l = -a^{2l+1} A_l ,$$

cuja substituição na solução geral fornece

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{-a^{2l+1} A_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad \blacksquare$$

Agora impomos a outra condição de fronteira:

$$u(b, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(b^l - \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l \frac{b^{2l+1} - a^{2l+1}}{b^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta) = f(\theta) .$$

Entre colchetes temos os coeficientes da série de Legendre de $f(\theta)$; usando (6.17), podemos escrever

$$A_l \frac{b^{2l+1} - a^{2l+1}}{b^{l+1}} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta ,$$

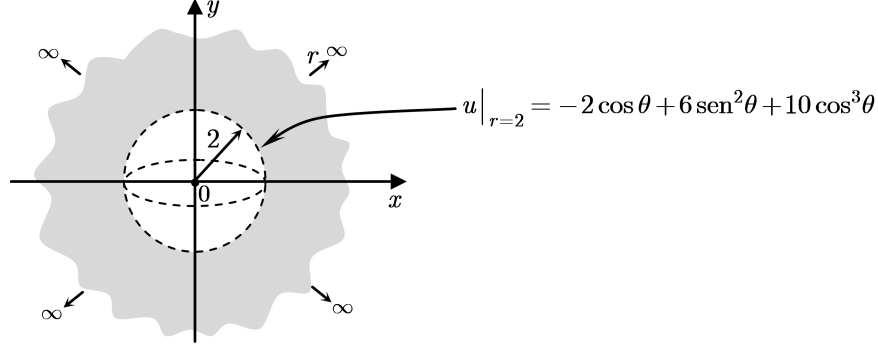
donde

$$A_l = \frac{(2l+1)b^{l+1}}{2(b^{2l+1} - a^{2l+1})} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad \blacksquare$$

— **Exemplo 6.2.3.** Resolva o seguinte problema em coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \\ r \in [2, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad u(2, \theta) = -2 \cos \theta + 6 \sin^2 \theta + 10 \cos^3 \theta. \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra esse problema.



De acordo com (6.33), temos que

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Mas $u(r \rightarrow \infty, \theta)$ deve ser finito $\Rightarrow A_l = 0 \Rightarrow u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$ [I]

Agora impondo a condição de fronteira, obtemos

$$u(2, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{2^{l+1}} P_l(\cos \theta) = -2 \cos \theta + 6 \sin^2 \theta + 10 \cos^3 \theta \quad \mu = \cos \theta \quad -2\mu + 6(1 - \mu^2) + 10\mu^3,$$

ou

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{2^{l+1}} P_l(\mu) = 6 - 2\mu - 6\mu^2 + 10\mu^3. \quad [\text{II}]$$

Vemos que $B_l/2^{l+1}$ são os coeficientes da série de Legendre do polinômio no membro direito. Ora, qualquer polinômio pode ser escrito em termos dos polinômios de Legendre facilmente usando as relações que expressam as potências $\mu^0 = 1, \mu, \mu^2, \dots$ em termos de $P_l(\mu)$:

$$\begin{cases} P_0(\mu) = 1 \\ P_1(\mu) = \mu \\ P_2(\mu) = \frac{3\mu^2 - 1}{2} \\ P_3(\mu) = \frac{5\mu^3 - 3\mu}{2} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = P_0(\mu) \\ \mu = P_1(\mu) \\ \mu^2 = \frac{2P_2(\mu) + P_0(\mu)}{3} \\ \mu^3 = \frac{2P_3(\mu) + 3P_1(\mu)}{5} \\ \vdots \end{cases} \quad (6.34)$$

Podemos, portanto, escrever [II] na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{2^1} P_0(\mu) + \frac{B_1}{2^2} P_1(\mu) + \frac{B_2}{2^3} P_2(\mu) + \frac{B_3}{2^4} P_3(\mu) + \dots \\ = 6 P_0(\mu) - 2 P_1(\mu) - 6 \cdot \frac{2P_2(\mu) + P_0(\mu)}{3} + 10 \cdot \frac{2P_3(\mu) + 3P_1(\mu)}{5} \\ = 4 P_0(\mu) + 4 P_1(\mu) - 4 P_2(\mu) + 4 P_3(\mu), \end{aligned}$$

donde, por simples comparação, obtemos $B_l = 0$ para $l \geq 4$, bem como

$$\frac{B_0}{2} = 4, \quad \frac{B_1}{4} = 4, \quad \frac{B_2}{8} = -4, \quad \frac{B_3}{16} = 4 \Rightarrow B_0 = 8, \quad B_1 = 16, \quad B_2 = -32, \quad B_3 = 64.$$

Substituindo esses resultados em [I], obtemos a resposta:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{B_0}{r} P_0(\mu) + \frac{B_1}{r^2} P_1(\mu) + \frac{B_2}{r^3} P_2(\mu) + \frac{B_3}{r^4} P_3(\mu) \\ &= \frac{8}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{16}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{32}{r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{64}{r^4} P_3(\cos \theta) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos, no lado esquerdo de [II], substituir $P_l(\mu)$ por suas expressões em termos de μ , assim obtendo uma série de potências de μ , cuja comparação com o polinômio no lado direito permite calcular B_l . Mas surge a questão: é necessário substituir todos $P_l(\mu)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) por suas respectivas expressões? A resposta é não! Sendo de 3º grau o polinômio no lado direito, basta considerar, no lado esquerdo, apenas os polinômios de Legendre de até o 3º grau [até o $P_3(\mu)$], uma vez que o conjunto $\{P_l(\mu)\}_{l=0}^3$, sendo linearmente independente e tendo polinômios de graus 0 até 3, é uma base do espaço vetorial formado por todos os polinômios de até o 3º grau.

Calculemos agora B_l usando esse procedimento. Em [II], vamos substituir as expressões dos polinômios de Legendre de até o 3º grau:

$$\begin{aligned} &\frac{B_0}{2^1} P_0(\mu) + \frac{B_1}{2^2} P_1(\mu) + \frac{B_2}{2^3} P_2(\mu) + \frac{B_3}{2^4} P_3(\mu) \\ &= \frac{B_0}{2} \cdot 1 + \frac{B_1}{4} \cdot \mu + \frac{B_2}{8} \cdot \frac{3\mu^2 - 1}{2} + \frac{B_3}{16} \cdot \frac{5\mu^3 - 3\mu}{2} \\ &= \left(\frac{B_0}{2} - \frac{B_2}{16} \right) + \left(\frac{B_1}{4} - \frac{3B_3}{32} \right) \mu + \frac{3B_2}{16} \mu^2 + \frac{5B_3}{32} \mu^3 = 6 - 2\mu - 6\mu^2 + 10\mu^3, \end{aligned}$$

donde, comparando os coeficientes dos polinômios em ambos lados, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{5B_3}{32} &\Rightarrow B_3 = 64, \\ \frac{3B_2}{16} &\Rightarrow B_2 = -32, \\ \frac{B_1}{4} - \frac{3B_3}{32} &= \frac{B_1}{4} - \frac{3(64)}{32} = -2 \Rightarrow B_1 = 16, \\ \frac{B_0}{2} - \frac{B_2}{16} &= \frac{B_0}{2} - \frac{-32}{16} = 6 \Rightarrow B_0 = 8. \end{aligned}$$

Esses são os mesmos valores já calculados acima, sendo a resposta a mesma, portanto.

—— **Exemplo 6.2.4.** Calcule a solução finita da equação de Laplace em coordenadas esféricas na região V dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ sob a condição $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ na fronteira de V .

A região V e a condição de fronteira é ilustrada na figura à direita. Esse problema é independente da coordenada longitudinal φ ? Verificamos isso escrevendo a condição de fronteira nas coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} u|_{r=3} &= [x^2 + y^2 - z]_{r=3} = [r^2 \sin^2 \theta - r \cos \theta]_{r=3} \\ &= 9 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta. \quad \text{[I]} \end{aligned}$$

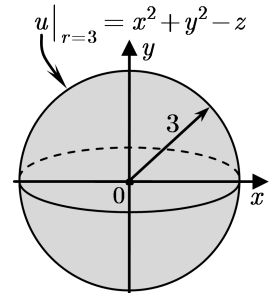
Uma vez que esse resultado é independente de φ , temos, de acordo com (6.33), que

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \Rightarrow u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

$$\text{Mas } u(r \rightarrow 0, \theta) \text{ deve ser finito} \Rightarrow B_l = 0 \Rightarrow u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \text{[II]}$$

onde os coeficientes A_l hão de ser determinados a partir da condição de fronteira em [I]:

$$u(3, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} 3^l A_l P_l(\cos \theta) = 9 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta,$$



ou, em termos de $\mu = \cos \theta$,

$$u(3, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} 3^l A_l P_l(\mu) = 9(1 - \mu^2) - 3\mu = 9 - 3\mu - 9\mu^2. \quad [\text{III}]$$

Agora prosseguimos como no exemplo anterior, expressando o polinômio no lado direito em termos dos polinômios de Legendre, obtendo

$$\begin{aligned} A_0 P_0(\mu) + 3A_1 P_1(\mu) + 9A_2 P_2(\mu) + \dots &= 9 P_0(\mu) - 3 P_1(\mu) - 9 \cdot \frac{2P_2(\mu) + P_0(\mu)}{3} \\ &= 6 P_0(\mu) - 3 P_1(\mu) - 6 P_2(\mu), \end{aligned}$$

donde,

$$A_0 = 6, \quad 3A_1 = -3 \Rightarrow A_1 = -1, \quad 9A_2 = -6 \Rightarrow A_2 = -\frac{2}{3}, \quad A_l|_{l \geq 3} = 0.$$

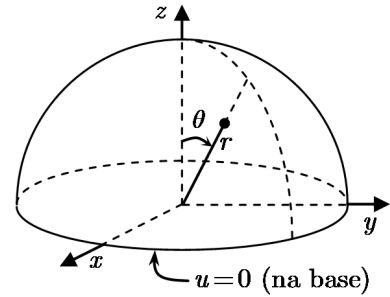
Substituindo esses resultados em [II], obtemos, finalmente,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= A_0 P_0(\mu) + A_1 r P_1(\mu) + A_2 r^2 P_2(\mu) \\ &= 6 P_0(\cos \theta) - r P_1(\cos \theta) - \frac{2}{3} r^2 P_2(\cos \theta) \blacksquare \end{aligned}$$

— **Exemplo 6.2.5.** Cálculo da solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace na semiesfera de raio b mostrada na figura sob as condições de fronteira:

- Na superfície plana (a base) da semiesfera: $u(r, \pi/2) = 0$
- Na superfície esférica: $u(b, \theta) = f(\theta)$.

A formulação desse problema com simetria longitudinal é parecida com aquela em (6.28), diferindo na variação da colatitude, agora $\theta \in [0, \pi/2]$, e pela condição adicional $u(r, \pi/2) = 0$:



$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \\ r \in [0, b], \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad u(r, \pi/2) = 0, \quad u(b, \theta) = f(\theta). \end{cases} \quad (6.35)$$

Com a separação de variável $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, obtemos as mesmas EDOs angular e radial em (6.29) e (6.31). Mas o problema de Sturm-Liouville que surge para $\Theta(\theta)$ é o do prob. (ii)-1 (6.18), cujos autovalores e autofunções são os fornecidos para o prob. (ii)-1 em (6.20). Então continuam as mesmas a forma da parte radial dada por (6.32) e a forma da solução geral dada por (6.33), só devendo os valores de l serem apenas os ímpares. Portanto a solução geral do presente problema é

$$u(r, \theta) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (6.36)$$

Nesta, devemos fazer $B_l = 0$ para evitar uma solução infinita na origem:

$$u(r, \theta) = \sum_{l=1,3,5,\dots} A_l r^l P_l(\cos \theta) \blacksquare$$

Para determinar os coeficientes A_l , impomos a condição de fronteira não homogênea:

$$u(b, \theta) = \sum_{l=1,3,5,\dots} [A_l b^l] P_l(\cos \theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi/2],$$

onde, entre colchetes, temos os coeficientes da série de Legendre ímpar de $f(\theta)$, os quais, de acordo com (6.27), são dados por

$$A_l b^l = (2l+1) \int_0^{\pi/2} f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

donde

$$A_l = \frac{2l+1}{b^l} \int_0^{\pi/2} f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \blacksquare$$

—— **Exemplo 6.2.6.** Resolva o problema no Exemplo 6.2.5 com esta única modificação: a condição de fronteira na base da semiesfera agora é $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2) = 0$.

Dessa condição de fronteira deduzimos que $\theta'(\pi/2) = 0$, indicando que, agora, o problema de autovalor é o prob. (ii)-2 em (6.18), cujos autovalores e autofunções são os fornecidos para o prob. (ii)-2 em (6.20). Portanto, todo o cálculo realizado no Exemplo 6.2.5 continua válido neste exemplo, exceto pelos valores de l , que agora devem ser os naturais pares. Assim, a solução é

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} A_l r^l P_l(\cos \theta), \text{ com } A_l = \frac{2l+1}{b^l} \int_0^{\pi/2} f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \blacksquare$$

6.3 Exercícios

6.3.1 Enunciados

1] Calcule a solução finita da equação de Laplace na região V dada por $1/4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ sob as seguintes condições: $u(x, y, z) = z$ se $x^2 + y^2 + z^2 = 1/4$ e $u(x, y, z) = 0$ se $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2] Resolva o seguinte problema em coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \\ r \in [a, b], \theta \in [0, \pi/2], u(a, \theta) = f(\theta), u(b, \theta) = 0, \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2) = 0. \end{cases}$$

3] Calcule a solução finita da equação de Laplace na semiesfera V dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ e $z \geq 0$, sob as seguintes condições na fronteira dessa semiesfera: $u = 1 + 3z^2$ na parte esférica e $\partial u / \partial \theta = 0$ na parte plana.

6.3.2 Soluções

1

A região V encontra-se entre as superfícies esféricas de raios $1/2$ e 1 centradas na origem.

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

$$u(1, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l + B_l) P_l(\cos \theta) = 0 \Rightarrow A_l + B_l = 0 \Rightarrow B_l = -A_l.$$

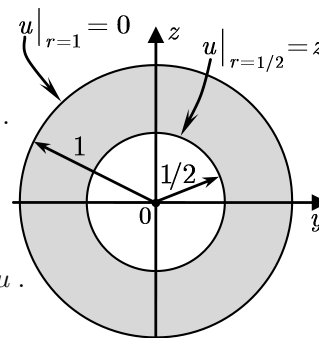
$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\mu) \quad (\mu = \cos \theta).$$

$$u(1/2, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{1}{2^l} - 2^{l+1} \right) P_l(\mu) = z|_{r=1/2} = r \cos \theta|_{r=1/2} = \frac{1}{2} \mu.$$

$$\underbrace{A_0(1-2)}_0 P_0(\mu) + \underbrace{A_1 \left(\frac{1}{2} - 4 \right)}_{A_1(-7/2) = 1/2} P_1(\mu) + \dots = \frac{1}{2} P_1(\mu).$$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -1/7, \quad \text{e } A_l = 0 \text{ para } l \geq 2.$$

$$u(r, \theta) = A_1 \left(r - \frac{1}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) = -\frac{1}{7} \left(r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \blacksquare$$



A figura à direita ilustra o problema.

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) .$$

$$u(b, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} \underbrace{\left(A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}} \right)}_{\therefore 0} P_l(\cos \theta) = 0 \Rightarrow B^l = -b^{2l+1} A_l .$$

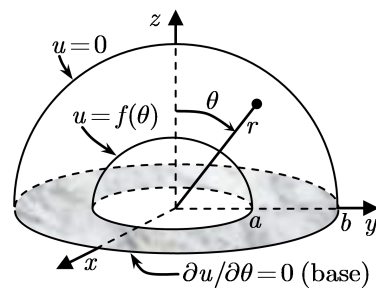
$$u(r, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} A_l \left(r^l + \frac{-b^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) .$$

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} A_l \left(\frac{r^{2l+1} - b^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \blacksquare$$

$$u(a, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} A_l \left(\frac{a^{2l+1} - b^{2l+1}}{a^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = f(\theta) , \quad \theta \in [0, \pi/2] .$$

$$A_l \left(\frac{a^{2l+1} - b^{2l+1}}{a^{l+1}} \right) = (2l+1) \int_0^{\pi/2} f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta .$$

$$A_l = \frac{(2l+1) a^{l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \int_0^{\pi/2} f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \blacksquare$$



A figura à direita ilustra esse problema.

$$\begin{aligned} u|_{r=3} &= [1 + 3z^2]_{r=3} = [1 + 3(r \cos \theta)^2]_{r=3} \stackrel{\mu = \cos \theta}{=} 1 + 27\mu^2 \\ &= P_0(\mu) + 27 \cdot \frac{2P_2(\mu) + P_0(\mu)}{3} = 10P_0(\mu) + 18P_2(\mu) . \end{aligned}$$

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} \left(A_l r^l + \frac{\overline{B_l}^{0(*)}}{r^{l+1}} \right) P_l(\mu) .$$

$$[(*) \text{ pois } u(r \rightarrow 0, \theta) \text{ finito} \Rightarrow B_l = 0] .$$

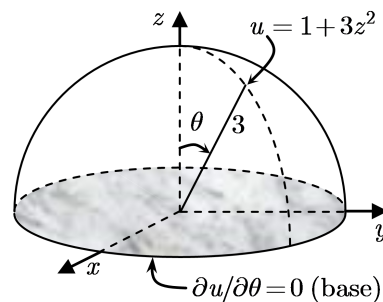
$$u(3, \theta) = \sum_{l=0,2,4,\dots} 3^l A_l P_l(\mu) = \underbrace{A_0}_{10} P_0(\mu) + \underbrace{9A_2}_{18} P_2(\mu) + \dots = 10P_0(\mu) + 18P_2(\mu) .$$

$$A_0 = 10 , \quad A_2 = 2 .$$

$$u(r, \theta) = A_0 r^0 P_0(\cos \theta) + A_2 r^2 P_2(\cos \theta) = 10P_0(\cos \theta) + 2r^2 P_2(\cos \theta) \blacksquare$$

ou, opcionalmente, uma vez que, $P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2$,

$$u(r, \theta) = 10 + r^2(3 \cos^2 \theta - 1) .$$



Capítulo 7

Resolução de EDPs em Domínios Infinitos

- Ref. [5], seq. 11.7, 11.8 e 12.6
- Ref. [8], seq. 14.3 e 14.4
- Ref. [6], cap. 5
- Ref. [2], cap. 6

7.1 Integrais de Fourier

7.1.1 Construção das Integrais de Fourier

Cada integral de Fourier a se deduzir abaixo pode ser formalmente entendida como o limite de uma série de Fourier quando o intervalo de expansão tende a infinito. Para mostrar isso, considere uma função qualquer definida em todo o eixo real. Como, em geral, não podemos desenvolver essa função em série de Fourier em todo o seu domínio (a não ser que ela seja periódica), começamos considerando a sua série de Fourier restrita a um intervalo $[-\ell, \ell]$ com o intuito de fazer $\ell \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} A_n|_{n \geq 1} = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, & A_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \\ B_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx & (B_0 = 0). \end{cases}$$

Mudemos o índice do somatório de n para $k = n\pi/\ell$ para na forma

$$f(x) = \sum_k A_{\frac{k\ell}{\pi}} \cos kx + B_{\frac{k\ell}{\pi}} \sin kx,$$

onde $k = 0, \frac{\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{3\pi}{\ell}, \dots$, que são valores que saltam de $\Delta k = \frac{\pi}{\ell}$. Multipliquemos agora o termo geral por $\frac{\ell}{\pi} \Delta k$, o que não altera o somatório, pois $\frac{\ell}{\pi} \Delta k = 1$, e mudemos em seguida a notação dos coeficientes conforme indicamos abaixo:

$$f(x) = \sum_k \left[\underbrace{\frac{\ell}{\pi} A_{\frac{k\ell}{\pi}}}_{\equiv \alpha(k)} \cos kx + \underbrace{\frac{\ell}{\pi} B_{\frac{k\ell}{\pi}}}_{\equiv \beta(k)} \sin kx \right] \Delta k = \sum_k [\alpha(k) \cos kx + \beta(k) \sin kx] \Delta k. \quad (7.1)$$

Além disso, vamos escrever $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ na forma

$$\alpha(k) = \frac{\ell}{\pi} A_{\frac{k\ell}{\pi}} = \begin{cases} \frac{\ell}{\pi} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos kx dx & \text{se } k > 0 \\ \frac{\ell}{\pi} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx & \text{se } k = 0, \end{cases}$$

$$\beta(k) = \frac{\ell}{\pi} B_{\frac{k\ell}{\pi}} = \frac{\ell}{\pi} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin kx dx.$$

Estamos pronto para proceder ao limite de $\ell \rightarrow \infty$, quando também $\Delta k \rightarrow 0$, isto é, k tende a apresentar uma variação contínua e, por conseguinte, o somatório \sum_k tende a ser uma integral $\int_0^\infty (\dots) dk$, o que nos leva ao resultado

$$f(x) = \int_0^\infty [\alpha(k) \cos kx + \beta(k) \sin kx] dk, \text{ com } \begin{cases} \alpha(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos kx dx \\ \beta(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin kx dx, \end{cases} \quad (7.2)$$

o qual compõe a chamada integral de Fourier em sentido estrito.

Se a função $f(x)$ for ímpar, então $\alpha(k) = 0$, obtendo-se, nesse caso, a integral de Fourier em senos:

$$f(x) = \int_0^\infty \beta(k) \sin kx dk, \text{ com } \beta(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx dx. \quad (7.3)$$

E, se $f(x)$ for par, então $\beta(k) = 0$, e (7.2) torna-se a integral de Fourier em cossenos:

$$f(x) = \int_0^\infty \alpha(k) \cos kx dk, \text{ com } \alpha(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos kx dx. \quad (7.4)$$

Na Nota 1 abaixo demonstramos que a integral de Fourier (7.2) também tem a seguinte "forma complexa" (ou "forma exponencial"):

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \gamma(k) dk, \text{ com } \gamma(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} f(x) dx. \quad (7.5)$$

Em sentido amplo, referimo-nos a (7.2), (7.3), (7.4) e (7.5) conjuntamente por integrais de Fourier, sendo elas, em sentido estrito, a integral de Fourier completa, em senos, em cossenos e complexa, respectivamente.

Nota 1 – *Dedução de (7.5)*

Substituindo (1.16) na integral para $f(x)$ em (7.2), obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left[\alpha(k) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + \beta(k) \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right] dk \\ &= \int_0^\infty \frac{\alpha(k) - i\beta(k)}{2} e^{ikx} dk + \int_0^\infty \frac{\alpha(k) + i\beta(k)}{2} e^{-ikx} dk \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^0 \underbrace{\frac{\alpha(-l) - i\beta(-l)}{2}}_{\gamma(l)} e^{-ilx} dl + \int_0^\infty \underbrace{\frac{\alpha(l) + i\beta(l)}{2}}_{\gamma(l)} e^{-ilx} dl = \int_{-\infty}^\infty \gamma(l) e^{-ilx} dl \quad (7.7)$$

onde, na passagem (*), fizemos, na primeira integral, a mudança de variável $k = -l$ e invertemos a ordem de integração, mudamos, na segunda integral, a letra de k para l , e, nas integrais resultantes, usamos a função γ na definição ★ abaixo. Assim demonstramos a representação integral de $f(x)$ dada em (7.5). Para provar a representação integral de $\gamma(k)$ em (7.5), substituímos, na definição ★ da função γ , as expressões de $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ dadas em (7.2):

$$\begin{aligned} \gamma(l) &\stackrel{\star}{=} \begin{cases} \frac{\alpha(l) + i\beta(l)}{2} & (l \geq 0) \\ \frac{\alpha(-l) - i\beta(-l)}{2} & (l \leq 0) \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos lx dx + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin lx dx & (l \geq 0) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(-lx) dx - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(-lx) dx & (l \leq 0) \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty f(x) (\cos lx + i \sin lx) dx & \text{se } l \geq 0 \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) (\cos lx + i \sin lx) dx & \text{se } l \leq 0 \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{ilx} dx \quad (7.8) \end{aligned}$$

Nota 2 – *Cada integral de Fourier pode ser expressa por meio de uma única equação:*

Em (7.2), substituindo as expressões de $\alpha(k)$ and $\beta(k)$ na de $f(x)$, tendo o cuidado de, antes da substituição, denotar a variável de integração x nas expressões de $\alpha(k)$ and $\beta(k)$ por outra letra, digamos x' , para distingui-la da variável x presente na representação integral de $f(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty dk \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x') \cos kx' dx' \right) \cos kx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x') \sin kx' dx' \right) \sin kx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x') [\cos kx' \cos kx + \sin kx' \sin kx] dx' dk, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x') \cos k(x' - x) dx' dk . \quad (7.9)$$

Usando substituições semelhantes para unificar (7.3), (7.4) e (7.5), obtemos

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kx \int_0^\infty f(x') \sin kx' dx' dk , \quad (7.10)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \int_0^\infty f(x') \cos kx' dx' dk , \quad (7.11)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x') e^{-ik(x'-x)} dx' dk . \quad (7.12)$$

7.1.2 Condições Suficientes para a Validade das Integrais de Fourier

Condições suficientes para garantir a validade das integrais de Fourier (e, portanto, das transformadas de Fourier) foram estabelecidas. Primeiramente exige-se que a função $f(x)$ seja absolutamente integrável, isto é que $\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx < \infty$ no caso de (7.2) e (7.5) e que $\int_0^\infty |f(x)| dx < \infty$ nos casos de (7.3) e (7.4). Note que, para essa condição ser satisfeita, é necessário que a função tenda a zero no infinito: $f(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ em (7.2) e (7.5), e $f(x \rightarrow \infty) = 0$ em (7.3) e (7.4). As demais condições são similares às que garantem a convergência das séries de Fourier: exige-se que tanto $f(x)$ quanto $f'(x)$ sejam *contínuas* por partes [isto é, que $f(x)$ seja *suave* por partes] em qualquer porção finita do intervalo de integração. Sob essas condições, vale a mesma regra de convergência das séries de Fourier: (7.9), (7.10), (7.11) e (7.12) valem com $f(x)$ (no lado esquerdo dessas equações) substituído por $[f(x^+) + f(x^-)]/2$. Assim, tomando (7.12) para exemplificar essa regra de convergência, temos que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x') \cos k(x' - x) dx' dk = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} . \quad (7.13)$$

Como as condições estabelecidas são suficientes, mas não necessárias, existem funções que, mesmo não as satisfazendo, podem ser representadas por uma integral de Fourier. Esse assunto é tratado na Ref. [2], seção 53 tendo em conta a seção 13.

7.1.3 Resolução de EDPs por Integrais de Fourier

Assim como uma série de Fourier de uma função $f(x)$ surge como uma expansão dessa função em autofunções oriundas de um problema de autovalor na variável x que toma valores num intervalo *finito*, espera-se que uma integral de Fourier para essa função surgirá quando x tomar valores num intervalo *infinito*. De fato, exemplificamos isso resolvendo a seguir, por separação de variáveis, primeiramente a equação unidimensional do calor numa barra de difusividade térmica α [para calcular a temperatura T em função da abscissa x e do tempo t] e, em seguida, a equação de Laplace. Admite-se que o aluno esteja familiarizado com o exposto no Cap. 6 da Apostila de Cálculo 4.

—— **Exemplo 7.1.1.** O problema de calor numa barra semi-infinita com sua extremidade a 0° :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} , & x \in (0, \infty) , \quad t > 0 \\ T(0, t) = 0 , & T(x, 0) = f(x) . \end{cases} \quad (7.14)$$

Este é o Exemplo 6.1 na Apostila de Cálculo 4, mas com $\ell \rightarrow \infty$. Resolvamo-lo por passos similares aos realizados naquele exemplo, começando por separar as variáveis, isto é, substituindo $T(x, t) = \psi(x)\tau(t)$ e sendo λ a constante de separação. Obtemos $\tau(t) = e^{-\lambda\alpha t}$ bem como o problema de autovalor

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0 , \quad x \in (0, \infty) , \quad \psi(0) = 0 ,$$

que é assim resolvido (seguindo os passos do problema de autovalor na equação (6.1) da Apostila de Cálculo 4):

Para $\lambda = 0$: $\psi(x) = c_1 + c_2x$

$$\left. \begin{array}{l} c_2 = 0 \text{ para evitar valor infinito de } \psi(x \rightarrow \infty) \\ \psi(0) = c_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = 0 \text{ } (\forall x) \text{ é a única solução} \\ \text{logo, não zero é autovalor.} \end{array} \right.$$

Para $\lambda = -k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$

$$\left. \begin{array}{l} c_2 = 0 \text{ para evitar valor infinito de } \psi(x \rightarrow \infty) \\ \psi(0) = c_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalores negativos.} \end{cases}$$

Para $\lambda = k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$$\psi(0) = c_1 = 0 \Rightarrow \psi(x) = c_2 \sin kx : \text{ esta solução é sempre finita! .}$$

Portanto, temos os autovalores $\lambda_k = k^2$, ($k > 0$), aos quais correspondem as autofunções $\psi_k(x) = \sin kx$. Este é um caso de autovalores de espectro *contínuo* (em contraste aos autovalores de espectro *discreto* observados anteriormente).

A solução geral é, portanto,

$$T(x, t) = \int_0^\infty B(k) \sin kx e^{-k^2 \alpha t} dk \quad \blacksquare \quad (7.15)$$

Vamos impor agora a condição inicial:

$$T(x, 0) = \int_0^\infty B(k) \sin kx dk = f(x) ,$$

e eis aí a esperada expansão de $f(x)$ em autofunções de espectro contínuo, representada por uma integral, em vez dos somatórios característicos das séries de autofunções de espectro discreto. Usando (7.3), obtemos

$$B(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx dx \quad \blacksquare \quad (7.16)$$

A resposta do problema é (7.15) com $B(k)$ dado por (7.16).

—— **Exemplo 7.1.2.** O problema de calor numa barra semi-infinita com sua extremidade isolada termicamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} , & x \in (0, \infty) , \quad t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 , & T(x, 0) = f(x) . \end{cases} \quad (7.17)$$

Com a separação $T(x, t) = \psi(x)\tau(t)$, obtemos $\tau(t) = e^{-\lambda \alpha t}$ e o problema de autovalor

$$\psi'' + \lambda \psi(x) = 0 , \quad x \in (0, \infty) , \quad \psi'(0) = 0 ,$$

que é assim resolvido:

Para $\lambda = 0$: $\psi(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow \psi'(x) = c_2$

$$\psi'(0) = c_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = c_1 \ (\forall x) \text{ é solução finita não nula;} \\ \text{logo, zero é autovalor.} \end{cases}$$

Para $\lambda = -k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx} \Rightarrow \psi'(x) = -kc_1 e^{-kx} + kc_2 e^{kx}$.

$$\left. \begin{array}{l} c_2 = 0 \text{ para evitar valor infinito de } \psi(x \rightarrow \infty) \\ \psi'(0) = -kc_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalores negativos.} \end{cases}$$

Para $\lambda = k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \Rightarrow \psi'(x) = -kc_1 \sin kx + kc_2 \cos kx$.

$$\psi'(0) = kc_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow \psi(x) = c_1 \cos kx : \text{ esta solução é sempre finita! .}$$

Portanto, temos os autovalores $\lambda_k = k^2$, ($k > 0$), aos quais correspondem as autofunções $\psi_k(x) = \cos kx$. Portanto, a solução geral é

$$T(x, t) = \int_0^\infty A(k) \cos kx e^{-k^2 \alpha t} dk \quad \blacksquare \quad (7.18)$$

Impondo a condição inicial, obtemos

$$T(x, 0) = \int_0^\infty A(k) \cos kx \, dk = f(x) ,$$

donde, usando (7.4), calculamos $A(k)$, completando a resposta:

$$A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos kx \, dx \quad \blacksquare \quad (7.19)$$

—— **Exemplo 7.1.3.** O problema de calor numa barra infinita em ambas as direções:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0, \quad T(x, 0) = f(x) . \quad (7.20)$$

Com a separação $T(x, t) = \psi(x)\tau(t)$, obtemos $\tau(t) = e^{-\lambda\alpha t}$ e o problema de autovalor

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad \text{com } x \in (-\infty, \infty),$$

sem condições de fronteira pela simples razão de não haver fronteira na reta real, sendo a condição de finitude a única a se impor.

Para $\lambda = 0$: $\psi(x) = c_1 + c_2x$

$$c_2 = 0 \quad \text{para evitar valor infinito de } \psi(x \rightarrow \infty) \quad \rangle \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = c_1 \ (\forall x) \text{ é solução finita não nula;} \\ \text{logo, zero é autovalor.} \end{cases}$$

Para $\lambda = -k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$

$$\begin{aligned} c_1 = 0 \quad \text{para evitar valor infinito de } \psi(x \rightarrow -\infty) \\ c_2 = 0 \quad \text{para evitar valor infinito de } \psi(x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad \rangle \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \ (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalores negativos.} \end{cases}$$

Para $\lambda = k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

Não há qualquer restrição sobre c_1 e c_2 .

Portanto, temos os autovalores $\lambda_k = k^2$, ($k \geq 0$), aos quais correspondem as autofunções $\psi_k(x) = A(k) \cos kx + B(k) \sin kx$. A solução geral é, portanto,

$$T(x, t) = \int_0^\infty [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] e^{-k^2 \alpha t} dk \quad \blacksquare \quad (7.21)$$

Impondo a condição inicial

$$T(x, 0) = \int_0^\infty [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] dk = f(x) ,$$

e usando (7.2), obtemos

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos kx \, dx \quad \text{e} \quad B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin kx \, dx \quad \blacksquare \quad (7.22)$$

A parte final da solução dentro dessa moldura acima pode ser desenvolvida pelo seguinte modo alternativo:

Para $\lambda = k^2$ ($k > 0$): $\psi(x) = c_1 e^{-ikx} + c_2 e^{ikx} \sin kx$

Não há qualquer restrição sobre c_1 e c_2 .

Portanto, temos os autovalores $\lambda_k = k^2$, com $k \in \mathbb{R}$, aos quais correspondem as autofunções $\psi_k(x) = e^{-ikx}$ (v. Ressalva abaixo). A solução geral é, portanto,

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-ikx} e^{-k^2 \alpha t} dk \quad \blacksquare \quad (7.23)$$

Impondo a condição inicial

$$T(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-ikx} dk = f(x), \quad (7.24)$$

e usando (7.5), obtemos

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad \blacksquare \quad (7.25)$$

Ressalva: As autofunções também podem ser expressas por $\psi_k(x) = e^{ikx}$, mas usamos a expressão com o sinal negativo no expoente para obter (7.24) na forma de (7.5).

— **Exemplo 7.1.4.** Resolva o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, & x \in (0, \infty), y \in (0, h) \\ u(0, y) = u(x, 0) = 0, & u(x, h) = f(x). \end{cases} \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \xrightarrow{u(x, y) \equiv X(x)Y(y)} \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\lambda} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

$$X'' + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad X(0) = 0.$$

Este problema de autovalor foi resolvido no Exemplo 7.1.1, onde obtivemos $\lambda_k = k^2$ ($k > 0$) e $X_k(x) = \sin kx$.

$$Y_k'' - \underbrace{\lambda_k}_{k^2} Y_k(y) = 0 \Rightarrow Y_k(y) = A(k) \cosh ky + B(k) \sinh ky.$$

$$Y_k(0) = 0 \Rightarrow A(k) = 0 \Rightarrow Y_k(y) = B(k) \sinh ky.$$

$$u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y) = \sin kx B(k) \sinh ky.$$

$$u(x, y) = \int_0^\infty u_k(x, y) dk = \int_0^\infty B(k) \sinh ky \sin kx dk \quad \blacksquare \quad (7.27)$$

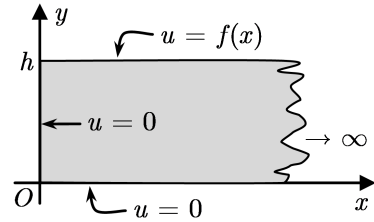
Determinamos $B(k)$ impondo a condição de fronteira não homogênea:

$$u(x, h) = \int_0^\infty [B(k) \sinh kh] \sin kx dk = f(x).$$

O termo entre colchetes pode ser calculado usando (7.3); logo,

$$B(k) \sinh kh = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx dx \Rightarrow B(k) = \frac{2}{\pi \sinh kh} \int_0^\infty f(x) \sin kx dx \quad \blacksquare \quad (7.28)$$

Nota-se que o método de separação de variáveis também é eficaz na resolução de uma EDP que envolve um problema de autovalor de domínio infinito. Tudo funciona similarmente, sendo a solução representada por uma integral (um "somatório de infinitésimos") com coeficientes dados pelas integrais de Fourier, em vez de ser representada por uma série de Fourier (cujos coeficientes têm similaridade ainda maior com as integrais de Fourier); em suma: somatórios "tornam-se" integrais. O exemplo seguinte mostra um problema cuja resolução envolve tanto um problema de autovalor de *domínio finito* quanto um de *domínio infinito*, sendo sua solução, portanto, representada tanto por uma série quanto uma integral de Fourier.



— **Exemplo 7.1.5.** Resolva o seguinte problema de calor:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t), & x \in (0, \infty), \quad y \in (0, h), \quad t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad T(x, 0, t) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, h, t) = 0, \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y). \end{cases} \quad (7.29)$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t) \xrightarrow{T(x, y, t) \equiv \psi(x, y)\tau(t)} \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda.$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + \lambda \psi(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda \psi(x, y) = 0 \\ \psi \text{ sob as mesmas condições de fronteira que } T \end{cases}$$

$$\psi(x, y) \equiv X(x)Y(y) \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} + \lambda = 0.$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 \\ x \in (0, \infty), \quad X(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{v. Exemplo 7.1.2}} \begin{cases} \lambda_k = k^2 \quad (k > 0) \\ X_k(x) = \cos kx. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0 \\ y \in (0, h), \quad Y(0) = Y'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/2h)^2 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \\ Y_n(y) = \sin(n\pi y/2h). \end{cases}$$

$$\psi_{kn}(x, y) = X_k(x)Y_n(y) = \cos kx \sin(n\pi y/2h).$$

$$\tau'_{kn} + \lambda_{kn} \tau_{kn}(t) \quad [\lambda_{kn} \equiv \mu_k + \nu_n] \Rightarrow \tau_{kn}(t) = e^{-\lambda_{kn} \alpha t}.$$

$$T_{kn}(x, y, t) = \psi_{kn}(x, y) \tau_{kn} = \cos kx \sin(n\pi y/2h) e^{-\lambda_{kn} \alpha t}.$$

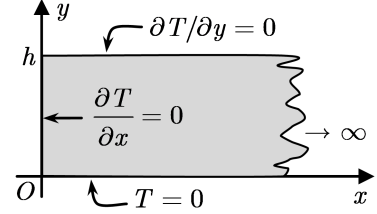
$$T(x, y, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \int_0^\infty A_{kn} T_{kn}(x, y, t) dk.$$

$$T(x, y, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \sin \frac{n\pi y}{2h} \int_0^\infty A_{kn} e^{-\lambda_{kn} \alpha t} \cos kx dk \quad \blacksquare \quad (7.30)$$

$$T(x, y, 0) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \sin \frac{n\pi y}{2h} \left[\int_0^\infty A_{kn} \cos kx dk \right] = T_0(x, y).$$

$$\int_0^\infty A_{kn} \cos kx dk = \frac{2}{h} \int_0^h T_0(x, y) \sin \frac{n\pi y}{2h} dy.$$

$$A_{kn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{2}{h} \int_0^h T_0(x, y) \sin \frac{n\pi y}{2h} dy \right] \cos kx dx \quad \blacksquare \quad (7.31)$$



Pelas EDPs resolvidas acima, observamos que a cada problema de autovalor de espectro contínuo corresponde uma integral de Fourier. As integrais de Fourier não se restringem a autofunções trigonométricas (por exemplo, há integrais de Fourier formadas pelas funções de Bessel). A partir delas podem ser definidas as famosas transformadas de Fourier, que oferecem um modo alternativo de resolver EDPs. No que segue expomos uma rápida introdução a elas que é restrita à aplicação na resolução de EDPs, sendo omitidas, portanto, muitas propriedades importantes delas e muitas outras considerações. Diga-se, entretanto, que, embora inicialmente formuladas com o propósito de resolver equações diferenciais, as transformadas de Fourier têm uma vasta gama de aplicações.

7.2 Transformadas de Fourier

7.2.1 Definição

O resultado em (7.3) permite definir a transformada de Fourier em senos de $f(x)$, denotada por $\mathcal{F}_s\{f(x)\}$, como sendo a integral que fornece $\beta(k)$ [função que passaremos a denotar por $\bar{f}_s(k)$], isto é,

$$\boxed{\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx dx = \bar{f}_s(k)} \quad , \quad (7.32)$$

bem como a chamada transformada de Fourier em seno inversa de $\bar{f}_s(k)$, denotada por $\mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{f}_s(k)\}$, como sendo a integral que fornece $f(x)$:

$$\boxed{\mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{f}_s(k)\} = \int_0^\infty \bar{f}_s(k) \operatorname{sen} kx \, dk = f(x)} \quad . \quad (7.33)$$

De modo análogo, (7.4) permite definir a transformada de Fourier em cossenos de $f(x)$, denotada por $\mathcal{F}_c\{f(x)\}$, como sendo a integral que fornece $\alpha(k)$ [função que passaremos a denotar por $\bar{f}_c(k)$], isto é,

$$\boxed{\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos kx \, dx = \bar{f}_c(k)} \quad , \quad (7.34)$$

bem como a chamada transformada de Fourier em cosseno inversa de $\bar{f}_c(k)$, denotada por $\mathcal{F}_c^{-1}\{\bar{f}_c(k)\}$, como sendo a integral que fornece $f(x)$:

$$\boxed{\mathcal{F}_c^{-1}\{\bar{f}_c(k)\} = \int_0^\infty \bar{f}_c(k) \cos kx \, dk = f(x)} \quad . \quad (7.35)$$

E (7.5) permite definir a transformada de Fourier complexa de $f(x)$, denotada por $\mathcal{F}\{f(x)\}$, como sendo a integral que fornece $\gamma(k)$ [função que passaremos a denotar por $\bar{f}(k)$], isto é,

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} f(x) \, dx = \bar{f}(k)} \quad , \quad (7.36)$$

bem como a chamada transformada de Fourier complexa inversa de $\bar{f}(k)$, denotada por $\mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(k)\}$, como sendo a integral que fornece $f(x)$:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(k)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \bar{f}(k) \, dk = f(x)} \quad . \quad (7.37)$$

Nota:

Há certa flexibilidade na forma de definir as integrais de Fourier e, portanto, as transformadas de Fourier:

Em (7.1) nada impede definir $\frac{\ell}{\pi} A_{\frac{k\ell}{\pi}} \equiv c \alpha(k)$ e $\frac{\ell}{\pi} B_{\frac{k\ell}{\pi}} \equiv c \beta(k)$, assim incluindo um parâmetro positivo livre c que passa a figurar nas integrais de Fourier. As equações (7.2), (7.3) e (7.5) passariam a ser

$$f(x) = \frac{1}{c} \int_0^\infty [\alpha(k) \cos kx + \beta(k) \operatorname{sen} kx] dk \quad , \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha(k) = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos kx \, dx \\ \beta(k) = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{c} \int_0^\infty \beta(k) \operatorname{sen} kx \, dk \quad , \quad \text{com} \quad \beta(k) = \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \quad , \quad (7.38)$$

$$f(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \gamma(k) \, dk \quad , \quad \text{com} \quad \gamma(k) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} f(x) \, dx \quad . \quad (7.39)$$

Conclusão 1: As duas constantes que aparecem multiplicando as duas integrais que definem a transformada de Fourier em senos e sua inversa podem variar, mas com a restrição de o produto ser $2/\pi$ (o mesmo acontecendo na transformada em cossenos), e as duas na definição da transformada complexa, com a do produto ser $1/2\pi$.

Observe que, na equação (7.6), efetuamos a mudança de variável $k = -l$ na primeira integral e simplesmente trocamos a letra k por l no integrando da segunda, assim obtendo, como mostra (7.7), uma única integral com o termo e^{-ilx} no integrando. Ora, poderíamos inverter essas operações entre as duas integrais em (7.6), isto é, simplesmente trocar a letra k por l na primeira integral e efetuar a mudança $k = -l$ na segunda, assim obtendo uma única integral com o termo e^{ilx} , ou seja, o resultado final seria (7.7) com o sinal de ilx trocado. Consequentemente, a definição \star da função $\gamma(l)$ resultaria com l trocado por $-l$ para $l \geq 0$ e $-l$ trocado por l para $l \leq 0$, o que levaria ao resultado final em (7.8) com o sinal de ilx trocado.

Conclusão 2: Pode-se trocar o sinal de ikx entre as integrais (7.36) e (7.37) que definem a transformada de Fourier complexa.

A forma da transformada de Fourier também pode variar efetuando-se uma mudança da variável de integração. Vejamos, por exemplo, a variação nas transformadas de Fourier causada pela mudança de variável $k = 2\pi l$ ($\Rightarrow dk = 2\pi dl$), primeiramente em (7.36) e (7.37):

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i2\pi lx} \underbrace{2\pi \bar{f}(2\pi l)}_{\equiv \bar{f}(l)} dl = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(l)\} \Rightarrow \bar{f}(l) = 2\pi \bar{f}(2\pi l) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i2\pi lx} f(x) \, dx = \mathcal{F}\{f(x)\} \quad ,$$

ou seja, a transformada de Fourier complexa passa a ter a nova forma

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi lx} f(x) dx = \tilde{f}(l) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(l)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi lx} \tilde{f}(l) dl = f(x) ; \quad (7.40)$$

agora em (7.32) e (7.33):

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \underbrace{\pi \tilde{f}_s(2\pi l)}_{\equiv \tilde{f}_s(l)} \sin 2\pi xl dl = \mathcal{F}_s^{-1}\{\tilde{f}_s(l)\} \Rightarrow \tilde{f}_s(l) = \pi \tilde{f}_s(2\pi l) = \pi \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi xl dx = \mathcal{F}_s\{f(x)\} ,$$

ou seja, a transformada de Fourier em senos passa a ser dada por

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi xl dx = \tilde{f}_s(l) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_s^{-1}\{\tilde{f}_s(l)\} = 2 \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(l) \sin 2\pi xl dl = f(x) . \quad (7.41)$$

Conclusão 3: Na transformada de Fourier complexa dada por (7.40) e na em senos dada por (7.41), o número π deixa de aparecer multiplicando as integrais, surgindo no argumento dos núcleos dessas transformadas.

Pois bem, essa flexibilidade na definição das transformadas de Fourier enseja formas preferenciais de uso conforme a área em que são empregadas:

- *Engenharia* [com $c = \pi/2$ em (7.38) e $c = 2\pi$ em (7.39)]:

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx = \bar{f}_s(k) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{f}_s(k)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}_s(k) \sin kx dk = f(x) . \quad (7.42)$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \bar{f}(k) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \bar{f}(k) dk = f(x) . \quad (7.43)$$

- *Física* [com $c = \sqrt{\pi/2}$ em (7.38) e $c = \sqrt{2\pi}$ em (7.39)]:

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx = \bar{f}_s(k) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{f}_s(k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}_s(k) \sin xk dk = f(x) . \quad (7.44)$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx = \bar{f}(k) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \bar{f}(k) dk = f(x) . \quad (7.45)$$

- *Processamento de Sinais* [(7.41), e (7.40) com os sinais de $i2\pi lx$ trocados nas duas integrais]:

$$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin 2\pi \omega t dt = \bar{f}_s(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{f}_s(\omega)\} = 2 \int_0^{\infty} \bar{f}_s(\omega) \sin 2\pi \omega t d\omega = f(t) . \quad (7.46)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \omega t} f(t) dt = \bar{f}(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \omega t} \bar{f}(\omega) d\omega = f(t) . \quad (7.47)$$

Neste texto, usamos as formas das integrais e transformadas de Fourier que naturalmente surgiram ao serem desenvolvidas, ou seja, por razões didáticas. Elas também são empregadas na Ref. [2], na qual as eq. (8) e (9) da seq. 51 correspondem à eq. (7.2); as eq. (3) e (4) da seq. 54, à eq. (7.4); as eq. (5) e (6) da seq. 54, à (7.3); e, no Prob. 3 da seq. 52, vemos a eq. (7.5) (exceto pelos sinais trocados de ikx).

7.2.2 Propriedades

- P1 - Linearidade:

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\} , \quad \text{com } \mathcal{F} = \mathcal{F} , \mathcal{F}_c \text{ ou } \mathcal{F}_s .$$

- P2 - Propriedades da diferenciação:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = -ik\bar{f}(k) , \quad \mathcal{F}\{f''(x)\} = -k^2\bar{f}(k) , \quad \mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (-ik)^n\bar{f}(k) .$$

$$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = k\bar{f}_s(k) - \frac{2}{\pi}f(0) , \quad \mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -k^2\bar{f}_s(k) - \frac{2}{\pi}f'(0) .$$

$$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -k\bar{f}_c(k) , \quad \mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -k^2\bar{f}_s(k) + \frac{2}{\pi}kf(0) .$$

- P3 - Convolução:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(k)\bar{g}(k)\} = \frac{1}{2\pi}f(x) * g(x) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\{f(x)g(x)\} = \bar{f}(k) * \bar{g}(k) .$$

onde, em ambas as fórmulas, usamos a definição

$$u(s) * v(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma) v(s - \sigma) d\sigma : \text{ convolução de } u \text{ e } v .$$

• P4 - Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(k)\bar{g}(k)dk .$$

Corolário:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}^*(k)|^2 dk .$$

Provas dessas propriedades

• Prova de P1

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a f(x) + b g(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} [a f(x) + b g(x)] dx \\ &= a \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx + b \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(x) dx = a \mathcal{F}\{f(x)\} + b \mathcal{F}\{g(x)\} \checkmark \end{aligned}$$

• Prova de P2

– Integrando por partes, obtemos

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{ikx} dx \stackrel{\text{p.p.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi} [f(x) e^{ikx}]_{-\infty}^{\infty}}_{0, \text{ pois } f(x \rightarrow \pm\infty)=0} - (ik) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx}_{\mathcal{F}\{f(x)\} = \bar{f}(k)} = -ik \bar{f}(k) \checkmark$$

– Usando essa fórmula uma vez, temos que

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = \mathcal{F}\{[f'(x)]'\} = -ik \mathcal{F}\{f'(x)\} = -ik(-ik) \mathcal{F}\{f(x)\} = (-ik)^2 \bar{f}(k) = -k^2 \bar{f}(k) \checkmark$$

– E usando-a n vezes, também temos que

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = \underbrace{(-ik) \cdots (-ik)}_{n \text{ fatores}} \mathcal{F}\{f(x)\} = (-ik)^n \bar{f}(k) \checkmark$$

– Integrações por partes fornecem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f'(x) \cos kx dx \stackrel{\text{p.p.}}{=} \frac{2}{\pi} [f(x) \cos kx]_0^{\infty} + k \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx}_{\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \bar{f}_s(k)} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cos kx - \frac{2}{\pi} f(0) + k \bar{f}_s(k) = k \bar{f}_s(k) - \frac{2}{\pi} f(0) \checkmark \\ &\quad \underbrace{0, \text{ pois } f(x \rightarrow \infty)=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f'(x) \sin kx dx \stackrel{\text{p.p.}}{=} \frac{2}{\pi} [f(x) \sin kx]_0^{\infty} - k \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx}_{\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \bar{f}_c(k)} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sin kx - k \bar{f}_c(k) = -k \bar{f}_c(k) \checkmark \\ &\quad \underbrace{0, \text{ pois } f(x \rightarrow \infty)=0} \end{aligned}$$

– E usando essas duas última fórmulas deduzimos estas duas:

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = \mathcal{F}_c\{[f'(x)]'\} = k \underbrace{\mathcal{F}_s\{f'(x)\}}_{-k \bar{f}_c(k)} - \frac{2}{\pi} f'(0) = -k^2 \bar{f}_c(k) - \frac{2}{\pi} f'(0) \checkmark$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = \mathcal{F}_s\{[f'(x)]'\} = -k \mathcal{F}_c\{f'(x)\} = -k [k \bar{f}_s(k) - \frac{2}{\pi} f(0)] = -k^2 \bar{f}_s(k) + \frac{2}{\pi} k f(0) \checkmark$$

• Prova de P3

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(k)\bar{g}(k)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \bar{f}(k)\bar{g}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} f(y) dy \right] \bar{g}(k) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} \bar{g}(k) dk \right] dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} f(x) * g(x) \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)g(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ilx} \bar{f}(l) dl \right] g(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(l) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-l)x} g(x) dx \right] dl = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(l) \bar{g}(k-l) dl = \bar{f}(k) * \bar{g}(k) \checkmark \end{aligned}$$

• Prova de P4

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(k) \bar{f}(k) dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(k)|^2 dk \checkmark$$

7.2.3 Resolução de EDPs por Transformadas de Fourier

Antes de aplicarmos as transformadas de Fourier na resolução de EDPs, dispense-mos algumas linhas sobre transformadas de Fourier de derivadas de funções de várias variáveis. Consideremos uma função $u(x, y)$ definida em todo o plano xy com o objetivo de calcular transformadas de Fourier de algumas de suas derivadas. Conforme a integral que define a transformada de Fourier seja efetuada em relação a x ou y , dizemos que se está calculando a transformada de Fourier na variável x ou y , respectivamente.

Pois bem, consideremos a transformada de Fourier de $u(x, y)$ na variável x :

$$\mathcal{F}\{u(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} u(x, y) dx \equiv \bar{u}(k, y) .$$

Seguem transformadas de derivadas em relação a y :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial u}{\partial y} dx = \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} u(x, y) dx \right] = \frac{d\bar{u}}{dy}(k, y) , \\ \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx = \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} u(x, y) dx \right] = \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}(k, y) , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja, a transformada de Fourier na variável x de uma derivada em relação a y é a derivada da transformada de Fourier: tais derivadas permanecem após a transformada.

Vejam agora transformadas de derivadas em relação a x :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial u}{\partial x} dx \stackrel{\text{p.p.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left[e^{ikx} u(x, y) \right]_{x \rightarrow -\infty}^{\infty}}_0 - ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} u(x, y) dx = -ik \bar{u}(k, y) , \\ \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right]\right\} = -ik \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right\} = (-ik)^2 \bar{u}(k, y) , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, para calcular a transformada de Fourier na variável x de uma derivada em relação a x , usa-se a propriedade P2, assim eliminando tal derivada.

Essas conclusões também são válidas para as transformadas em cosseno e seno. Observe nos exemplos abaixo que, quando as transformadas são na variável x , então derivadas em relação a y permanecem e as em relação a x são eliminadas após o uso da propriedade P2:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right\} &= \frac{d\bar{u}_c}{dy}(k, y) , & \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\right\} &= \frac{d^2 \bar{u}_s}{dy^2}(k, y) , \\ \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right\} &= k \bar{u}_s(k, y) - \frac{2}{\pi} u(0, y) , & \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)\right\} &= -k^2 \bar{u}_c(k, y) - \frac{2}{\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) , \\ \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right\} &= -k \bar{u}_c(k, y) , & \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)\right\} &= -k^2 \bar{u}_s(k, y) + \frac{2}{\pi} k u(0, y) . \end{aligned}$$

Vejam agora um exemplo de aplicação mista de transformadas de Fourier. Se

$$\mathcal{F}_c\{u(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(x, y) \cos kx dx \equiv \bar{u}_c(k, y)$$

e

$$\mathcal{F}_s\{u(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(x, y) \sen ly dy \equiv \tilde{u}_s(x, l) ,$$

então

$$\mathcal{F}_s\{\mathcal{F}_c\{u(x, y)\}\} = \mathcal{F}_s\{\bar{u}_c(k, y)\} = \tilde{\bar{u}}_{cs}(k, l) .$$

Isso pode acontecer numa resolução de EDP de várias variáveis em que se aplica \mathcal{F}_c numa variável e \mathcal{F}_s noutra.

Quanto a como determinar qual a transformada de Fourier a se empregar, o preceito é o seguinte:

a) Se o intervalo I da variável em relação à qual uma transformada de Fourier será aplicada for *infinito* em ambas direções, isto é, $I = (-\infty, \infty)$, usamos a transformada de Fourier complexa e sua inversa, dadas respectivamente por (7.36) e (7.37).

b) Se I for *semi-infinito*, isto é, $I = [0, \infty)$, usamos a transformada de Fourier em senos e sua inversa, dadas por (7.32) e (7.33), ou a em cossenos e sua inversa, dadas por (7.34) e (7.35), conforme a condição no extremo inicial de I seja respectivamente a de Dirichlet ou a de Neumann. Isso é consistente com o fato de que o seno e o cosseno nessas transformadas tenham surgido de problemas de autovalor sob condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente.

Pois bem, nos cinco exemplos seguintes, resolvemos novamente os problemas dos Exemplos 7.1.1 a 7.1.5 apresentados na subseção 7.1.3, mas agora usando as transformadas de Fourier.

—— **Exemplo 7.2.1.** O problema de calor numa barra semi-infinita com sua extremidade a 0° :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{com } x \in (0, \infty) \text{ e } t > 0, \quad \text{sendo } T(0, t) = 0 \text{ e } T(x, 0) = f(x).$$

Solução:

$$\mathcal{F}_s\{T(x, t)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(x, t) \sin kx \, dx \equiv \bar{T}_s(k, t).$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \xrightarrow[\text{P2}]{\mathcal{F}_s} \quad -k^2 \bar{T}_s(k, t) + \frac{2}{\pi} \underbrace{k T(0, t)}_{0^{(*)}} = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_s}{dt}.$$

(*) De acordo com a condição de fronteira de Dirichlet em $x = 0$.

$$\frac{d \bar{T}_s}{dt} + \alpha k^2 \bar{T}_s(k, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{T}_s(k, t) = B(k) e^{-\alpha k^2 t}. \quad [\text{I}]$$

$$T(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{T}_s(k, t)\} = \mathcal{F}_s^{-1}\{B(k) e^{-\alpha k^2 t}\} \quad \Rightarrow \quad T(x, t) = \int_0^\infty B(k) e^{-\alpha k^2 t} \sin kx \, dk \quad \blacksquare$$

$$T(x, 0) = f(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \quad \underbrace{\bar{T}_s(k, 0)}_{B(k)} = \mathcal{F}_s\{f(x)\} \quad \xrightarrow{[\text{I}]} \quad B(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx \, dx \quad \blacksquare$$

A solução do problema é composta por esses dois resultados, sendo exatamente aquela dada por (7.15) e (7.16).

—— **Exemplo 7.2.2.** O problema de calor numa barra semi-infinita com sua extremidade isolada termicamente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{com } x \in (0, \infty) \text{ e } t > 0, \quad \text{sendo } \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \text{ e } T(x, 0) = f(x).$$

Solução:

$$\mathcal{F}_c\{T(x, t)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(x, t) \cos kx \, dx \equiv \bar{T}_c(k, t).$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \xrightarrow[\text{P2}]{\mathcal{F}_c} \quad -k^2 \bar{T}_c(k, t) - \frac{2}{\pi} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)}_{0^{(*)}} = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_c}{dt}.$$

(*) De acordo com a condição de fronteira de Neumann em $x = 0$.

$$\frac{d \bar{T}_c}{dt} + \alpha k^2 \bar{T}_c(k, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{T}_c(k, t) = A(k) e^{-\alpha k^2 t}. \quad [\text{I}]$$

$$T(x, t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{\bar{T}_c(k, t)\} = \mathcal{F}_c^{-1}\{A(k) e^{-\alpha k^2 t}\} \quad \Rightarrow \quad T(x, t) = \int_0^\infty A(k) e^{-\alpha k^2 t} \cos kx \, dk \quad \blacksquare$$

$$T(x, 0) = f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \underbrace{\bar{T}_c(k, 0)}_{A(k)} = \mathcal{F}_c\{f(x)\} \xrightarrow{[I]} A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos kx \, dx \quad \blacksquare$$

A solução do problema é composta por esses dois resultados, sendo exatamente aquela dada por (7.18) e (7.19).

—— **Exemplo 7.2.3.** O problema de calor numa barra infinita em ambas as direções:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{com } x \in (-\infty, \infty), \quad \text{sendo } T(x, 0) = f(x).$$

Solução:

$$\mathcal{F}\{T(x, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} T(x, t) \, dx \equiv \bar{T}(k, t).$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \xrightarrow[\text{P2}]{\mathcal{F}} -k^2 \bar{T}(k, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}}{dt}.$$

$$\frac{d\bar{T}}{dt} + \alpha k^2 \bar{T}(k, t) = 0 \Rightarrow \bar{T}(k, t) = C(k) e^{-\alpha k^2 t}. \quad [I]$$

$$T(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{T}(k, t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{C(k) e^{-\alpha k^2 t}\} \Rightarrow T(x, t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} C(k) e^{-\alpha k^2 t} \, dk \quad \blacksquare$$

$$T(x, 0) = f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{\bar{T}(k, 0)}_{C(k)} = \mathcal{F}\{f(x)\} \xrightarrow{[I]} C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} f(x) \, dx \quad \blacksquare$$

A solução do problema é composta por esses dois resultados, sendo exatamente aquela dada por (7.23) e (7.25).

—— **Exemplo 7.2.4.** Resolução da equação de Laplace num domínio retangular, semi-infinito ao longo do eixo x e de altura h :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in (0, \infty), \quad y \in (0, h) \\ u(0, y) = u(x, 0) = 0, & u(x, h) = f(x). \end{cases}$$

Solução:

$$\mathcal{F}_s\{u(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty u(x, y) \sin kx \, dx \equiv \bar{u}_s(k, y).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow[\text{P2}]{\mathcal{F}_s} -k^2 \bar{u}_s(k, y) + \frac{2}{\pi} k \underbrace{u(0, y)}_{0^{(*)}} + \frac{d^2 \bar{u}_s}{dy^2}.$$

(*) De acordo com a condição de fronteira de Dirichlet em $x = 0$.

$$\frac{d^2 \bar{u}_s}{dy^2} - k^2 \bar{u}_s(k, y) = 0 \Rightarrow \bar{u}_s(k, y) = A(k) \cosh ky + B(k) \sinh ky. \quad [I]$$

$$u(x, 0) = 0 \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \underbrace{\bar{u}_s(k, 0)}_{A(k)} = 0 \xrightarrow{[I]} A(k) = 0 \Rightarrow \bar{u}_s(k, y) = B(k) \sinh ky. \quad [II]$$

$$u(x, y) = \mathcal{F}_s^{-1}\{\bar{u}_s(k, y)\} = \mathcal{F}_s^{-1}\{B(k) \sinh ky\} \Rightarrow u(x, y) = \int_0^\infty B(k) \sinh ky \sin kx \, dk \quad \blacksquare$$

$$u(x, h) = f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \underbrace{\bar{u}_s(k, h)}_{B(k) \sinh kh} = \mathcal{F}_s\{f(x)\} \xrightarrow{[II]} B(k) \sinh kh = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx \, dx$$

$$\Rightarrow B(k) = \frac{2}{\pi \sinh kh} \int_0^\infty f(x) \sin kx \, dx \quad \blacksquare$$

A solução do problema é composta por esses dois resultados, sendo exatamente aquela dada por (7.27) e (7.28).

—— **Exemplo 7.2.5.** Resolução da equação do calor num domínio retangular, semi-infinito ao longo do eixo x e de altura h :

$$\begin{cases} \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t), & x \in (0, \infty), \quad y \in (0, h), \quad t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad T(x, 0, t) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, h, t) = 0, \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y). \end{cases}$$

Solução:

$$\mathcal{F}_c\{T(x, y, t)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(x, y, t) \cos kx \, dx \equiv \bar{T}_k(y, t).$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} -k^2 \bar{T}_k(y, t) - \frac{2}{\pi} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t)}_0 + \frac{\partial^2 \bar{T}_k}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial t}.$$

Essa EDP, com a separação de variáveis $\bar{T}_k(y, t) \equiv Y(y)\tau(t)$, toma a forma $-k^2 + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\nu} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau}$.

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, h) \\ Y(0) = Y'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_n = (n\pi/2h)^2 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \\ Y_n(y) = \sin(n\pi y/2h). \end{cases}$$

$$\tau'_{kn} + (k^2 + \nu_n)\alpha\tau_{kn}(t) = 0 \Rightarrow \tau_{kn}(t) = e^{-(k^2 + \nu_n)\alpha t}.$$

$$\bar{T}_k(y, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{kn} e^{-(k^2 + \nu_n)\alpha t} \sin \frac{n\pi y}{2h}.$$

$$T(x, y, t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{\bar{T}_k(y, t)\} = \int_0^\infty \left[\sum_{n=1,3,5,\dots} A_{kn} e^{-(k^2 + \nu_n)\alpha t} \sin \frac{n\pi y}{2h} \right] \cos kx \, dk \quad \blacksquare$$

Determinamos os coeficientes A_{kn} por meio da transformada \mathcal{F}_c da condição inicial:

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \bar{T}_k(y, 0) = \mathcal{F}_c\{T_0(x, y)\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{kn} \sin \frac{n\pi y}{2h} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T_0(x, y) \cos kx \, dx,$$

que é uma série de Fourier da função (de y) no membro direito, cujos coeficientes A_{kn} são, portanto,

$$A_{kn} = \frac{2}{h} \int_0^h \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty T_0(x, y) \cos kx \, dx \right] \sin \frac{n\pi y}{2h} \, dy \quad \blacksquare$$

A solução do problema é formada pelos dois resultados marcados com a quadrícula, sendo exatamente aquela dada por (7.30) e (7.31).

Vejamos mais um problema, ainda não resolvido neste texto:

—— **Exemplo 7.2.6.** Resolva o seguinte problema em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi, z) = 0, & \rho \in (0, b), \quad \varphi \in (0, \gamma), \quad z \in (0, \infty) \\ u(b, \varphi, z) = f(\varphi, z), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0, z) = u(\rho, \gamma, z) = 0, \quad u(\rho, \varphi, 0) = 0. \end{cases} \quad (7.48)$$

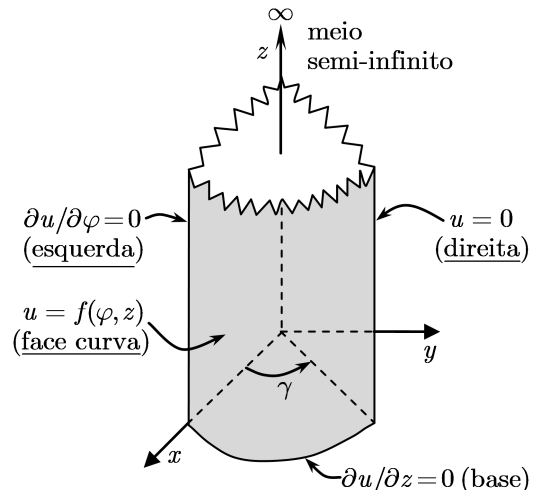
Solução:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

$$\mathcal{F}_c\{u(\rho, \varphi, z)\} = \int_0^\infty u(\rho, \varphi, z) \cos kz \, dz \equiv \bar{u}(\rho, \varphi, k).$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\pi} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi, 0)}_{0^{(*)}} = 0.$$

(*) Condição de fronteira de Neumann em $z = 0$.



$$\bar{u}(\rho, \varphi, k) \equiv R(\rho) \Phi(\varphi) \Rightarrow \frac{R'' + (1/\rho)R}{R} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-\mu} = 0 .$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu \Phi(\varphi) = 0 , & \varphi \in (0, \gamma) \\ \Phi'(0) = \Phi(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_m = (m\pi/2\gamma)^2 \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \Phi_m(\varphi) = \cos(m\pi\varphi/2\gamma) . \end{cases}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \left[k^2 \rho^2 + \left(\frac{m\pi}{2\gamma} \right)^2 \right] R(\rho) = 0 \Rightarrow R = R_m(\rho) = A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(k\rho) + \underbrace{B_m(k) K_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(k\rho)}_{0^{(*)}} .$$

$$(*) R_m(\rho \rightarrow \infty) \text{ finito} \Rightarrow B_m(k) = 0 , \text{ pois } \lim_{x \rightarrow 0} K_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(x) = \infty .$$

$$\bar{u}_m(\rho, \varphi, k) = R_m(\rho) \Phi_m(\varphi) = A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(k\rho) \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} .$$

$$\bar{u}(\rho, \varphi, k) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \bar{u}_m(\rho, \varphi, k) = \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(k\rho) \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} . \quad [\text{I}]$$

$$u(\rho, \varphi, z) = \mathcal{F}_s^{-1} \{ \bar{u}(\rho, \varphi, k) \} = \int_0^\infty \left[\sum_{m=1,3,5,\dots} A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(k\rho) \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} \right] \cos kz \, dz . \quad [\text{II}]$$

$$\begin{aligned} u(b, \varphi, z) = f(\varphi, z) &\xrightarrow{\mathcal{F}_s} \bar{u}(b, \varphi, k) = \mathcal{F}_s \{ f(\varphi, z) \} \\ &\xrightarrow{[\text{I}]} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(kb) \right] \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\varphi, z) \cos kz \, dz , \quad \varphi \in [0, \gamma] . \end{aligned}$$

Nessa equação, entre colchetes, temos os coeficientes da série de Fourier generalizada da função de φ que resulta da integral em relação a z que se encontra no membro direito, sendo essa série aquela associada ao Problema de autovalor (iv) apresentado na pág. 40; portanto,

$$A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(kb) = \frac{2}{\gamma} \int_0^\gamma \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\varphi, z) \cos kz \, dz \right] \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} \, d\varphi .$$

Desse resultado e de [II] obtemos a resposta:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} \int_0^\infty A_m(k) I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(k\rho) \cos kz \, dz ,$$

onde $A_m(k) = \frac{4}{\pi\gamma I_{\frac{m\pi}{2\gamma}}(kb)} \int_0^\gamma \int_0^\infty f(\varphi, z) \cos kz \cos \frac{m\pi\varphi}{2\gamma} \, dz \, d\varphi .$

Referências Bibliográficas

- [1] Byron, F. W. Jr. e Fuller, R. W., *Mathematical of Classical and Quantum Physics*, Dover Publications, New York (TWO Volumes Bound as One), 1992, ISBN-13: 978-0-486-67164-2, ISBN-10: 0-486-67164-X.
- [2] Brown, J. B. e Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, Eighth Edition, McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-803597-5, New York, 2012.
- [3] Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [4] Kreyszig, Erwin, *Matemática Superior para Engenharia*, 9ª Edição, Volume 1, LTC Editora, 2008, ISBN-10: 8521616430, ISBN-13: 978-8521616436.
- [5] Kreyszig, Erwin, *Matemática Superior para Engenharia*, 9ª Edição, Volume 2, LTC Editora, 2008, ISBN-10: 8521616449, ISBN-13: 978-8521616443.
- [6] Spiegel, Murray R., *Análise de Fourier*, McGraw-Hill, São Paulo, 1976 (Coleção Schaum)
- [7] Zill, Dennis G. e Cullen, Michael R., *Equações Diferenciais*, Terceira Edição, Volume 1, Pearson Makron Books, São Paulo, 2001, ISBN 85-346-1291-9.
- [8] Zill, Dennis G. e Cullen, Michael R., *Equações Diferenciais*, Terceira Edição, Volume 2, Pearson Makron Books, São Paulo, 2001, ISBN 85-346-1141-6.