

## Texto Didático de Cálculo 4 (GMA00158)

- Sequências e Séries de Potências
- Resolução de EDO Linear por Série de Potências
- Sistema de EDOs Lineares de 1ª Ordem
- Transformada de Laplace
- Séries de Fourier
- Resolução das Equações do Calor, Onda e Laplace por Separação de Variáveis

Roberto Toscano Couto  
`rtoscano@id.uff.br`  
<https://rtoscanocouto.wixsite.com/aula>  
Departamento de Matemática Aplicada  
Universidade Federal Fluminense  
Niterói, RJ

1ª edição: 2024

Esta versão: 13 de fevereiro de 2026

## Prefácio

Trata-se de um texto didático para a disciplina "Cálculo 4" (ministrada pelo Departamento de Matemática Aplicada da UFF sob o código GMA00158), cujo objetivo é a descrição das seguintes técnicas para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) e parciais (EDPs): série de potências (para EDOs), transformada de Laplace (para EDOs e sistemas de EDOs), método dos autovalores (para sistemas de EDOs de 1ª ordem), e separação de variáveis (para EDPs). Este texto contém exatamente o que se apresenta nas aulas, evitando que o aluno as copie, assim se obtendo mais a sua atenção e economizando tempo, bem como definindo com clareza o que se deve estudar. Para o seu aprendizado, são imprescindíveis as explicações dadas nas aulas, quando, então, se detalham muitas das passagens matemáticas. As principais referências bibliográficas são apresentadas abaixo do título de cada capítulo.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Sequências e Séries</b>	<b>4</b>
1.1	Sequências . . . . .	4
1.2	Séries de Números Reais . . . . .	5
1.3	CrITÉRIOS de Convergência e Divergência . . . . .	7
1.4	Séries de Potências . . . . .	13
1.5	Séries de Taylor e de MacLaurin . . . . .	16
1.6	Exercícios . . . . .	19
1.7	Soluções dos Exercícios . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Resolução de Equação Diferencial Ordinária Linear por Série de Potências</b>	<b>33</b>
2.1	Definições . . . . .	35
2.2	Teorema da Existência de Soluções em Série de Potências . . . . .	36
2.3	Exemplos de Resolução de EDOs Lineares por Séries de Potências em Torno de Ponto Ordinário . . . . .	37
2.4	Exercícios . . . . .	39
<b>3</b>	<b>O Método dos Autovalores para Sistema de EDOs Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes</b>	<b>40</b>
3.1	Tópicos Preliminares . . . . .	40
3.1.1	Solução Geral de Sistema de EDOs Lineares de Coeficientes Constantes . . . . .	40
3.1.2	Alguns Aspectos da Teoria dos Autovalores e Autovetores de um Operador Linear	42
3.2	Sistemas Homogêneos . . . . .	43
3.2.1	1º Caso: Autovalores Reais e Distintos . . . . .	44
3.2.2	2º Caso: Autovalores Imaginários . . . . .	45
3.2.3	3º Caso: Autovalores Repetidos . . . . .	46
3.3	Sistemas Não Homogêneos . . . . .	51
3.3.1	Método dos Coeficientes a Determinar . . . . .	51
3.3.2	Método da Variação dos Parâmetros . . . . .	53
3.4	Aplicações . . . . .	55
3.4.1	Conversão de EDO Linear de Ordem $n \geq 2$ num Sistema de $n$ EDOs de Primeira Ordem . . . . .	55
3.4.2	Modelagem . . . . .	56
3.4.2.1	Circuitos Elétricos . . . . .	56
3.4.2.2	Tanques Misturadores . . . . .	58
3.5	Exercícios . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>61</b>
4.1	Definição . . . . .	61
4.2	A Linearidade da Transformada de Laplace . . . . .	61
4.3	Condições Suficientes para a Existência da Transformada de Laplace e o Comportamento Assintótico Sob Essas Condições . . . . .	61
4.4	Cálculo de $\mathcal{L}$ de $e^{at}$ , $t^n$ , $\sin at$ , $\cos at$ , $\sinh at$ , $\cosh at$ . . . . .	62
4.5	Propriedades Especiais . . . . .	63
4.6	Transformada de Laplace Inversa . . . . .	63
4.7	Função Degrau Unitário . . . . .	64
4.8	Função Delta de Dirac . . . . .	65
4.9	Tabela de Transformadas de Laplace de Funções Específicas . . . . .	68
4.10	Cálculo de $\mathcal{L}$ de $f(at)$ , $e^{at}f(t)$ , $t^n f(t)$ , $\mathcal{U}(t-a)f(t-a)$ , $f(t)/t$ . . . . .	68

4.11	Transformada de Laplace de Derivadas . . . . .	70
4.12	Transformada de Laplace de Integrais . . . . .	71
4.13	Cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\}$ por Convolução . . . . .	72
4.14	Transformada de Laplace de Função Periódica . . . . .	72
4.15	Tabela de Transformadas de Laplace com Funções Genéricas . . . . .	73
4.16	Aplicações . . . . .	74
4.16.1	Cálculo de Integrais Definidas . . . . .	74
4.16.2	Resolução de Equações Com Derivada Ou Integral . . . . .	74
4.16.3	Resolução de Sistemas de EDOs . . . . .	76
4.17	Exercícios . . . . .	77
4.18	Soluções dos Exercícios . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b> . . . . .	<b>85</b>
5.1	Construção da Série de Fourier . . . . .	85
5.1.1	Série de Fourier de Função Periódica . . . . .	85
5.1.2	Série de Fourier de Função Não Periódica . . . . .	88
5.2	Convergência Pontual da Série de Fourier . . . . .	90
5.3	Séries de Fourier em Senos e em Cossenos . . . . .	92
5.4	Exercícios . . . . .	93
5.5	Soluções dos Exercícios . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Resolução de Equações Diferenciais Parciais Clássicas por Separação de Variáveis</b> . . . . .	<b>97</b>
6.1	Autofunções . . . . .	97
6.2	Equação do Calor Unidimensional . . . . .	101
6.3	Equação da Onda Unidimensional . . . . .	104
6.4	Equação de Laplace . . . . .	106
6.4.1	Equação de Laplace em Domínios Retangulares . . . . .	106
6.4.2	Equação de Laplace em Domínios com Bordas Circulares . . . . .	110
6.4.2.1	Equação de Laplace com Condição de Fronteira Não Homogênea em Borda Circular . . . . .	110
6.4.2.2	Equação de Laplace com Condição de Fronteira Não Homogênea em Borda Retilínea . . . . .	113
6.5	Exercícios . . . . .	115
6.5.1	Enunciados . . . . .	115
6.5.2	Soluções . . . . .	116
6.6	Problemas Propostos . . . . .	123
6.7	Apêndice . . . . .	124
6.7.1	Gradiente, Divergência, Laplaciano . . . . .	124
6.7.2	Solução Geral da EDO $\psi'' + \lambda\psi(x) = 0$ . . . . .	124
6.7.3	O Laplaciano em Coordenadas Polares . . . . .	125
6.7.4	Solução Geral da EDO $r^2R'' + rR' + \lambda R(r) = 0$ . . . . .	126
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>128</b>

# Capítulo 1

## Sequências e Séries

{Ref. [12], seções 11.1 a 11.10.}

### 1.1 Sequências

Se a cada inteiro positivo  $n$  associarmos um número  $a_n$ , dizemos que esses números formam uma sequência, que é ordenada segundo seus índices:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots, \quad a_n, \quad a_{n+1}, \quad \dots .$$

Exemplos:

i)  $a_n = 1/2^n$  :  $a_1 = 1/2, \quad a_2 = 1/4, \quad a_3 = 1/8, \quad \dots$

ii)  $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$  :  $a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{9}{4}, \quad a_3 = \frac{16}{9}, \quad \dots$

Chamamos  $a_n$  de termo geral da sequência, o qual é usado também para indicar a própria sequência, isto é, dizemos simplesmente, por exemplo, "que a sequência  $a_n = n^2$  é formada pelos quadrados dos naturais."

Se o que denominamos limite da sequência, dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad ,$$

for finito, isto é, se para qualquer  $\epsilon > 0$  é possível achar  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{para } n > N \quad ,$$

dizemos que a sequência  $a_n$  converge para  $a$ . Se aquele limite não existe, dizemos que a sequência  $a_n$  é divergente.

Observe que uma sequência  $a_n$  pode ser vista como uma função  $a(n)$  da variável natural  $n$ . Com isso, a definição do limite acima é formalmente a mesma que aquela adotada no caso de uma função  $f(x)$  da variável real  $x$ .

Sejam  $m$  e  $n$  naturais quaisquer, com  $m < n$ . Dizemos que uma sequência  $a_n$  é

- crescente se  $a_m \leq a_n$  [Ex: 2, 5, 5, 6, 7, 7, 11,  $\dots$ ] (estritamente crescente se  $a_m < a_n$ )
- decrescente se  $a_m \geq a_n$  [Ex: 6, 6, 3, 2, 2, 1,  $\dots$ ] (estritamente decrescente se  $a_m > a_n$ )
- monótona se for crescente ou decrescente
- limitada superiormente se  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- limitada inferiormente se  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \geq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- limitada se existem  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que  $\lambda_1 \leq a_n \leq \lambda_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Note que, na definição de sequências crescente e decrescente, permite-se a igualdade entre termos, o que possibilita considerar a sequência constante (aquela cujo termo geral é constante; por exemplo: 3, 3, 3,  $\dots$ ) tanto como uma sequência crescente quanto decrescente e, por conseguinte, também como monótona.

### Teorema 1

É convergente uma sequência que

- é crescente e limitada superiormente
- é decrescente e limitada inferiormente

É divergente uma sequência que

- é crescente e que não é limitada superiormente (ela diverge para  $\infty$ )
- é decrescente e que não é limitada inferiormente (ela diverge para  $-\infty$ )

## 1.2 Séries de Números Reais

Dada uma sequência  $a_k$ , a sequência de termo geral

$$s_n = \sum_{k=m}^n a_k \quad (n = m, m+1, \dots)$$

[ou seja,

$$\begin{aligned} s_m &= a_m \quad (1^\circ \text{ termo}) \\ s_{m+1} &= a_m + a_{m+1} \\ &\vdots \\ s_n &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad (\text{termo geral}) \\ &\vdots \quad ] \end{aligned}$$

é denominada de série associada à sequência  $a_n$ . Os números  $a_n$  são chamados de termos da série, e os números  $s_n$ , de somas parciais da série.

O limite da série é o limite da sequência das somas parciais  $s_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots,$$

o qual, quando existe, denomina-se soma da série, caso em que a série é dita convergente. Se o somatório  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  não existir [limite inexistente, isto é, não único ou infinito ( $\pm\infty$ )], a série é dita divergente.

O símbolo  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  usado para indicar a soma da série é usado também para indicar a própria série.

Por exemplo, a soma da série geométrica,  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ , é igual a  $1/(1-q)$  se  $|q| < 1$ :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{se } |q| < 1 \quad (*)}.$$

De fato:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n q^k &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ q s_n &= \sum_{k=0}^n q^{k+1} &= q + q^2 + \dots + q^{n+1} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} s_n - q s_n = (1-q) s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cancel{q^{n+1}}^0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \text{ se } |q| < 1 \right].$$

---

(\*) Convencionalmente,  $x^0 \equiv 1 \forall x \in \mathbb{R}$ , isto é,  $x^0$  denota a função constante  $f(x) = 1$ .

Vejam as duas aplicações da fórmula acima:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2 .$$

Uma fórmula da soma da série geométrica com o termo inicial mais genérico  $q^i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ), em vez do termo inicial  $q^0 = 1$ , é a seguinte, deduzida a partir dos resultados já obtidos acima:

$$\boxed{\sum_{k=i}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{i-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^i}{1-q} = \frac{q^i}{1-q} \text{ se } |q| < 1} .$$

Observe que trabalhar com a série

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots ,$$

cujo somatório começa com o índice  $m$ , é equivalente a trabalhar com a série de termo geral  $a_{m+k}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} = a_m + a_{m+1} + \cdots ,$$

cujo somatório começa com o índice 0. Por isso não há perda de generalidade em se estabelecer um teorema para uma série que comece com o índice 0:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

### Teorema 2

Se  $\alpha$  é um real dado e as séries  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  convergem, então:

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  converge
- b)  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$  converge

### Teorema 3

Para que a série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  convirja, é necessário que o termo geral tenda a zero, isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Segue desse teorema o critério do termo geral para a divergência: se  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  difere de zero ou não existe então a série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  é divergente.

Exemplos:

- i)  $\sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-1)^k]$  diverge, pois os termos dessa série são os da sequência

$$a_k = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{se } k \text{ for par} \\ 0 & \text{se } k \text{ for ímpar} \end{cases} ,$$

cujo limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  não existe. Além disso, vemos que

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0 + 2 = 2, \quad s_3 = 0 + 2 + 0 = 2, \quad s_4 = 0 + 2 + 0 + 2 = 4, \cdots ,$$

isto é, a sequência  $s_n$  das somas parciais é crescente e não é limitada superiormente; logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-1)^k] = \infty, \text{ de acordo com o Teorema 1.}$$

ii)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3}$  diverge, pois  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^2+3} = 1 \neq 0$ . Em vista disso e do fato de  $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{k^2+3}$  ser uma sequência crescente (por ser formada de termos positivos), temos que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3} = \infty$ .

iii) A série  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  satisfaz a condição necessária de o seu termo geral tender a zero ( $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/k = 0$ ); entretanto, ela diverge para  $\infty$ , como veremos adiante.

iv)  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3$  satisfaz a condição necessária de o seu termo geral tender a zero ( $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/k^3 = 0$ ) e é convergente, como veremos adiante.

Uma série do tipo

$$\sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k a_k = a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots,$$

em que  $a_k$  nunca muda de sinal, é dita alternada. Exemplos:

i)  $2 - 3 + 4 - 5 + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k$

ii)  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \left(-\frac{1}{k}\right)$

#### Teorema 4: Critério de convergência para série alternada

A série alternada  $\sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k b_k$  [ $b_k > 0$ ] é convergente se a sequência (de termos positivos)  $b_k$  é decrescente e  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ .

Exemplo: A série  $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$  converge, pois satisfaz as condições do Teorema 4: é alternada, e a sequência  $b_k = \frac{1}{\ln k}$  é positiva, decrescente e tende a zero.

## 1.3 Critérios de Convergência e Divergência

#### Teorema 5: Critério da integral

Considere uma série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  com  $a_k > 0$  para  $k$  maior ou igual a algum natural  $l$ . Se existe uma função  $f$  contínua, positiva, decrescente satisfazendo  $f(k) = a_k$  para  $k \geq l$  então aquela série será convergente ou divergente conforme a integral imprópria  $\int_l^{\infty} f(x) dx$  seja convergente ou divergente, respectivamente.

Exemplos:

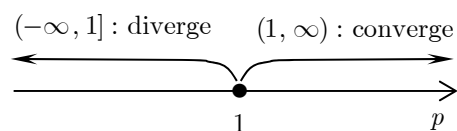
i) A série  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ , com  $a_k = \frac{1}{k \ln k}$ . A função  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  é contínua, positiva, decrescente em  $[2, \infty)$  e tal que  $f(k) = a_k$  para  $k \geq 2$ . Como

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty,$$

temos que a série dada é divergente.

ii) A chamada série harmônica de ordem  $p$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots,$$





converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ . De fato:

Se  $p \leq 0$ , o termo geral  $\frac{1}{n^p}$  não tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ ; portanto, segundo o Teorema 3, a série diverge.

Se  $p > 0$ , o critério da integral, com  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , fornece

- para  $p = 1$ :  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{\ln b - \ln 1}_{\infty} = \infty$ ,

mostrando que a série diverge.

- para  $p \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{1-p} \left( \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p}}_{\infty} - 1 \right) = \infty & \text{se } p \in (0, 1) \\ \frac{1}{1-p} \left( \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}}}_0 - 1 \right) = \frac{1}{p-1} & \text{se } p \in (1, \infty) \end{cases}$$

mostrando que a série diverge se  $p \in (0, 1)$  e converge se  $p > 1$ .

#### Teorema 6: Critério da comparação

Se  $0 \leq a_k \leq b_k$  para  $k$  maior ou igual a algum natural  $l$ , então:

- a)  $\sum_{k=0}^\infty b_k$  converge  $\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty a_k$  converge
- b)  $\sum_{k=0}^\infty a_k$  diverge  $\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty b_k$  diverge

Exemplos:

i) A série  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}$ .

A figura à direita ilustra o fato de que  $\sin \theta < \theta$  se  $\theta > 0$ . Assim,  $\sin \frac{1}{k} < \frac{1}{k}$ , o que nos permite escrever

$$0 \leq \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Logo, como a série  $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2$  converge (por ser a série harmônica de ordem 2), a série dada também converge.

ii) A série  $\sum_{k=2}^\infty \frac{k-1}{2k^3+1}$ .

Para  $k \geq 2$ , temos que:

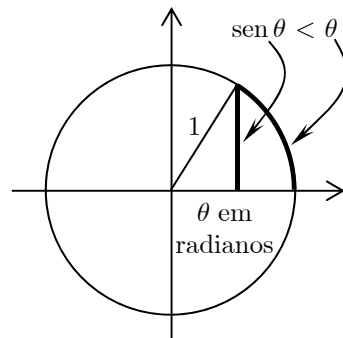
$$\frac{k-1}{2k^3+1} \leq \frac{k-1+1}{2k^3+1-1} = \frac{1}{2k^2}.$$

Logo, como a série  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$  converge (por ser a série harmônica de ordem 2), a série dada também converge.

iii) A série  $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{\ln k}$ .

Temos, para  $k \geq 2$ , que:

$$\frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k} \quad (\text{pois } \ln k \leq k \quad \forall k > 1).$$



Logo, como a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge (por ser a série harmônica de ordem 1), a série dada também diverge.

iv) A série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 5}$ .

Temos, para  $k \geq 1$ , que:

$$\frac{k}{k^2 + 2k + 5} \geq \frac{k}{k^2 + 2k^2 + 5k^2} = \frac{k}{8k^2} = \frac{1}{8k}.$$

Logo, como a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8k} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge (por ser a série harmônica de ordem 1), a série dada também diverge.

v) A série  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$  converge, pois

$$0 \leq \frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n} \text{ para } n \geq 1,$$

e a série  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  (geométrica) é convergente:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(1/2)^3}{1 - 1/2} = \frac{1}{4}.$$

Dizemos que uma série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  é absolutamente convergente se  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  for convergente. Uma série convergente que não é absolutamente convergente é dita condicionalmente convergente.

#### Teorema 7: Critério da comparação no limite

Sejam  $\sum_k a_k$  e  $\sum_k b_k$  séries de termos positivos. Se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$  for um número finito diferente de zero<sup>(\*)</sup>, então essas duas séries convergem ou as duas divergem.

A condição de  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$  ser finito e diferente de zero garante que as séries  $\sum_k a_k$  e  $\sum_k b_k$  sejam assintoticamente de uma mesma ordem  $k^p$ . Assim, para aplicar o teorema acima, precisamos inferir uma série  $\sum_k b_k$  que seja assintoticamente da mesma ordem que a série  $\sum_k a_k$  investigada, o que se consegue igualando  $b_k$  ao termo assintoticamente dominante em  $\sum_k a_k$ , que é a estratégia empregada nos exemplos que seguem.

Exemplos:

i) A série  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{2k^3+1}$  [este é o Exemplo (ii) do Teorema 6].

Com  $a_k = \frac{k-1}{2k^3+1} > 0$  e  $b_k = \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2} > 0 \quad \forall k \geq 2$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{2k^3+1} \cdot \frac{1}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3 - k^2}{2k^3 + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/k}{2 + 1/k^3} = \frac{1}{2} : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que  $\sum_k b_k$  converge (por ser uma série harmônica de ordem  $p = 2$ ), concluímos que a série  $\sum_k a_k$  dada também converge.

---

(\*) O critério da comparação no limite pode ser estendido aos casos em que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k$  seja zero ou infinito, que são aqui omitidos, não por serem complicados, mas pelo pouco tempo de aula para o estudo deste texto. O aluno interessado pode inteirar-se deles na Ref. [7], seção 3.2, ou na Ref. [12], seção 11.4, Exercícios 40 e 41.

Esse exemplo mostra que o desafio na aplicação do teorema em questão é encontrar uma série de referência  $\sum_k b_k$  cuja convergência (ou divergência) seja conhecida e que torne  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k$  finito e não nulo, o que então revela se a série investigada  $\sum_k a_k$  é convergente (ou divergente), pois essas duas séries, de acordo com o teorema, devem exibir o mesmo comportamento assintótico. Na aplicação do Critério da Comparação no Limite (CCL), a busca da série de referência exige a mesma intuição necessária no uso do Critério da Comparação (CC). Contudo, no CCL, identificar essa série costuma ser mais direto: ela é formada apenas pelo termo dominante da série investigada, permitindo imediatamente ignorar os demais termos, que se tornam desprezíveis no processo de limite. Em contrapartida, no CC, esses termos secundários precisam ser eliminados por meio de uma cadeia de desigualdades nem sempre evidentes para que se isole o termo dominante na comparação. Em resumo, embora ambos os critérios sempre conduzam à mesma série de referência baseada no termo dominante, o percurso no CCL é, via de regra, mais simples. Uma ressalva: o preço da simplicidade do CCL é o cálculo do limite, que pode se tornar complexo diante de funções mais exóticas, caso em que o CC possa ser uma alternativa mais viável.

Continuemos com os exemplos:

ii) A série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 5}$  [este é o Exemplo (iv) do Teorema 6] .

Com  $a_k = \frac{k}{k^2 + 2k + 5} > 0$  e  $b_k = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} > 0 \ \forall k \geq 1$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 5} \bigg/ \frac{1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^2 + 2k + 5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2/k + 5/k^2} = 1 : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que a série  $\sum_k b_k$  diverge (por ser harmônica de ordem  $p = 1$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também diverge.

iii) A série  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^3 + 2k}}{5k^3 - 8k^2}$  .

Com  $a_k = \frac{\sqrt[3]{k^3 + 2k}}{5k^3 - 8k^2} > 0$  e  $b_k = \frac{\sqrt[3]{k^3}}{k^3} = \frac{1}{k^2} > 0 \ \forall k \geq 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^3 + 2k}}{5k^3 - 8k^2} \bigg/ \frac{1}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 \sqrt[3]{k^3 + 2k}}{5k^3 - 8k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^3 + 2k}}{5k - 8} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \sqrt[3]{1 + 2/k^2}}{k(5 - 8/k)} = \frac{1}{5} : \text{ finito.} \end{aligned}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que  $\sum_k b_k$  converge (por ser uma série harmônica de ordem  $p = 2$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também converge.

iv) A série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6k-2}}{\sqrt[3]{9k^4 + 5k^2}}$  .

Com  $a_k = \frac{\sqrt{6k-2}}{\sqrt[3]{9k^4 + 5k^2}} > 0$  e  $b_k = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[3]{k^4}} = \frac{k^{1/2}}{k^{4/3}} = \frac{1}{k^{(4/3)-(1/2)}} = \frac{1}{k^{5/6}} > 0 \ \forall k \geq 1$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6k-2}}{\sqrt[3]{9k^4 + 5k^2}} \bigg/ \frac{1}{k^{5/6}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{5/6} \sqrt{6k-2}}{\sqrt[3]{9k^4 + 5k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{5/6} \sqrt{k} \sqrt{6-2/k}}{\sqrt[3]{k^4} \sqrt[3]{9+5/k^2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{(5/6)+(1/2)} \sqrt{6-2/k}}{k^{4/3} \sqrt[3]{9+5/k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{4/3} \sqrt{6-2/k}}{k^{4/3} \sqrt[3]{9+5/k^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{9}} : \text{ finito.} \end{aligned}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, sendo  $\sum_k b_k$  uma série harmônica de ordem  $p = 5/6 \leq 1$  e, portanto, divergente, a série  $\sum_k a_k$  dada também é divergente.

v) A série  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2 - 3}$ .

Com  $a_k = \frac{\ln k}{k^2 - 3} > 0$  e  $b_k = \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}} > 0 \quad \forall k \geq 2$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k^2 - 3} \bigg/ \frac{1}{k^{3/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k^{7/2} - 3k^{3/2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{(7/2)k^{5/2} - (9/2)k^{1/2}} = 0 : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que  $\sum_k b_k$  converge (por ser uma série harmônica de ordem  $p = 3/2$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também converge.

### Teorema 8

É convergente a série que converge absolutamente.

Exemplo: Considere a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sen k}{k^2}$ . Constatamos, por comparação, que ela converge absolutamente:  $0 \leq \left| \frac{\sen k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ . Logo, ela própria é convergente.

### Teorema 9: Critério da razão

Considere uma série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , com  $a_k \neq 0$ , tal que  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k|$  exista ou seja infinito. Podemos afirmar que

- a) Se  $L < 1$ , a série dada converge absolutamente
- b) Se  $L > 1$  ou  $L = \infty$ , a série diverge
- c) Se  $L = 1$ , o critério nada revela

Exemplos:

i) A série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , com  $a_k = 2^k/k!$ , converge, pois

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1.$$

ii) A série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , com  $a_k = k^k/k!$ , diverge, pois

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{k+1}/(k+1)!}{k^k/k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^k (k+1)}{k^k} \frac{1}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k+1}{k} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k = e > 1. \end{aligned}$$

iii) Cálculo de  $x$  de modo que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , com  $a_n = n x^n$ , seja convergente.

Se  $x = 0$  então  $a_n = 0$ , e a soma da série é zero (série convergente).

Se  $x \neq 0$ , pelo critério da razão, temos que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |x| \cdot 1 = |x|,$$

mostrando que a série é convergente para  $|x| < 1$ . Mas, para  $|x| = 1$ , o critério da razão nada revela, e uma análise separada é necessária:

Para  $x = 1$ , temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$  (série divergente).

Para  $x = -1$ , temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Big|_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n$ , que é uma série divergente, de acordo com o Teorema 3, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (-1)^n$  não existe.

Resposta: a série dada é convergente para  $|x| < 1$ .

iv) A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \dots,$$

formada por duas séries geométricas de razão  $1/4$  (uma constituída pelos termos com  $k$  par e a outra, pelos com  $k$  ímpar), é tal que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{5 + (-1)^{k+1}}{6 \cdot 2^{k+1}} \cdot \frac{6 \cdot 2^k}{5 + (-1)^k} \right| = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5 + (-1)^{k+1}}{5 + (-1)^k} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{5-1}{5+1} = \frac{1}{3} & \text{se } k \rightarrow \infty \text{ tomando valores pares} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{5+1}{5-1} = \frac{3}{4} & \text{se } k \rightarrow \infty \text{ tomando valores ímpares;} \end{cases} \end{aligned}$$

logo, esse limite não existe, o que inviabiliza a aplicação do critério da razão enunciado acima<sup>(\*)</sup>.

Mas outros por procedimentos podemos provar que essa série converge e, mais ainda, calcular a sua soma: cf. Prob. 24.

#### Teorema 10: Critério da raiz

Considere uma série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  tal que  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  exista ou seja infinito. Podemos afirmar que

- a) Se  $L < 1$ , a série dada converge absolutamente
- b) Se  $L > 1$  ou  $L = \infty$ , a série diverge
- c) Se  $L = 1$ , o critério nada revela

Exemplo: A série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , com  $a_k = k^3/3^k$ , é convergente, pois

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{3/k} = \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{3(\frac{\ln k}{k})} = \frac{1}{3} e^{3(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k})} = \frac{1}{3} e^0 = \frac{1}{3} < 1. \quad (\dagger)$$

Outro exemplo: vimos, no Exemplo (iv) logo acima, que o critério da razão (Teorema 9) falha com a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k}$ . Vamos, entretanto, empregar o critério da raiz; uma vez que

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left| \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k} \right|} = \begin{cases} \sqrt[k]{\frac{5+1}{6 \cdot 2^k}} = \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} & \text{se } k \text{ for par} \\ \sqrt[k]{\frac{5-1}{6 \cdot 2^k}} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{6} \right)^{1/k} \rightarrow \frac{1}{2} & \text{quando } k \rightarrow \infty \text{ tomando valores ímpares,} \end{cases}$$

isto é,  $L = 1/2 < 1$ , concluímos que a série é convergente<sup>(‡)</sup>.

(\*)O critério da razão admite uma formulação mais genérica pela qual se verifica a convergência da série acima: cf. a seção 6-8 da referência bibliográfica [9].

(†) Usando a regra de l'Hopital, vemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{1} = 0$ .

(‡) Foi usado o seguinte resultado: se  $a > 0$  então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a}{k}} = e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{k}} = e^0 = 1$ .

## 1.4 Séries de Potências

Seja  $x$  uma variável real e considere um valor  $x_0$  fixo dessa variável. Entendemos por série de potências uma série cujo termo geral é o da sequência  $a_n(x-x_0)^{E_n}$  (uma potência de  $x-x_0$  multiplicada por uma constante):  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{E_n}$ . Neste texto, o expoente  $E_n$  consistirá simplesmente nos números naturais,  $E_n = n \in \mathbb{N}$ , ou nestes acrescidos de um número real  $r$  fixo,  $E_n = n+r$ . Ou seja, trabalharemos com as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+r} = a_0(x-x_0)^r + a_1(x-x_0)^{1+r} + a_2(x-x_0)^{2+r} + \dots$$

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{E_n}$  é dita série de potências relativa a  $x_0$  (ou em torno de  $x_0$ , ou ainda centrada em  $x_0$ ), na qual  $x_0$  é denominado ponto de expansão da série. É bastante frequente a série de potências centrada em zero; por exemplo:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ .

Seguem dois teoremas fundamentais no estudo das séries de potências:

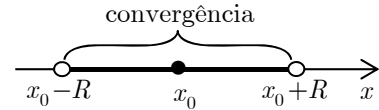
### Teorema 11

Toda série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  tem um raio de convergência  $R$  tal que a série converge absolutamente se  $|x-x_0| < R$  e diverge se  $|x-x_0| > R$ .

O número  $R$  pode ser 0 (caso em que a série converge somente para  $x = x_0$ ), um número real positivo, ou  $\infty$  (caso em que a série converge para todo  $x$ ), podendo ser calculado pela fórmula

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

contanto que, para algum natural  $N$ ,  $a_n \neq 0$  se  $n \geq N$ , e o limite forneça um único resultado, finito ou infinito.



Observe que o teorema nada diz se  $|x-x_0| = R$ : nos pontos  $x = x_0 \pm R$ , a série pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Além disso, se  $a_n$  se anula uma infinidade de vezes, o raio de convergência  $R$  não pode ser calculado com as fórmulas acima; nesse caso, exemplificaremos como  $R$  pode ser determinado por meio dos critérios da razão e da raiz: v. os exemplos (vi) e (vii) abaixo.

O conjunto dos valores reais de  $x$  para os quais a série é convergente é chamado de intervalo de convergência. Este, segundo o teorema, pode consistir apenas no ponto  $x_0$ , se  $R = 0$ , ou, se  $R > 0$ , nos intervalos  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ,  $[x_0 - R, x_0 + R)$ ,  $(x_0 - R, x_0 + R]$  ou  $[x_0 - R, x_0 + R]$ , conforme a série seja convergente, ou não, em  $x_0 \pm R$ .

Por exemplo, vamos calcular o raio de convergência  $R$  e o intervalo de convergência

i) da série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ :

$$R = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 \\ \text{ou} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

e, portanto, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$  só converge em  $x = 0$ .

ii) da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$  :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+2)}{1/(n+3)} = 1 \\ \text{ou} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ converge } \forall x \in (-1, 1) .$$

Analisemos a convergência nos ponto  $x = \pm 1$ . Se  $x = 1$ , temos a série divergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} \left[ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \right]$ . Se  $x = -1$ , temos a série alternada  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$ , que, segundo o Teorema 4, é convergente (condicionalmente convergente, obviamente).

Resposta: A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$  converge no intervalo  $[-1, 1)$ , sendo  $R = 1$ .

iii) da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \\ \text{ou} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \dots = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ converge } \forall x \in \mathbb{R} .$$

iv) da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n n}$  :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2 \\ \text{ou} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{2^n n}}_{2 \sqrt[n]{n}} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n n} \text{ converge } \forall x \in (3-2, 3+2) = (1, 5) .$$

Analisemos a convergência nos pontos extremos desse intervalo. Se  $x = 1$ , temos a série divergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Se  $x = 5$ , temos a série alternada  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , que, segundo o Teorema 4, é convergente (condicionalmente convergente).

Resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n n}$  converge no intervalo  $(1, 5]$ , sendo  $R = 2$ .

v) da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{6 \cdot 2^n} \cdot x^n$  :

Os coeficientes  $a_n = \frac{5 + (-1)^n}{6 \cdot 2^n}$  são tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 3$  ou  $\frac{4}{3}$ , conforme  $n \rightarrow \infty$  tomando valores pares ou ímpares, respectivamente (isso já foi verificado no Exemplo (iv) desenvolvido na pág. 12); assim, por não existir esse limite, calculemos o raio de convergência usando a fórmula de  $R$  envolvendo a raiz  $n$ -ésima:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{5 + (-1)^n}{6 \cdot 2^n} \right|}} \\ &= \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{6 \cdot 2^n}{5+1}} = 2 & \text{se } n \rightarrow \infty \text{ tomando valores pares} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{6 \cdot 2^n}{5-1}} = 2 \cdot \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4}}}^1 = 2 & \text{se } n \rightarrow \infty \text{ tomando valores ímpares,} \end{cases} \end{aligned}$$

isto é,  $R = 2$ , convergindo a série no intervalo  $(-2, 2)$ . Uma vez que, nos extremos desse intervalo, a série toma as formas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{6 \cdot 2^n} \cdot x^n \Big|_{x=-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5 + (-1)^n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{6 \cdot 2^n} \cdot x^n \Big|_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{6},$$

que são séries divergentes (pois o termo geral não tende a zero), temos, como resposta, que a série dada converge no intervalo  $(-2, 2)$ .

**vi)** da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{64^n n^2}$  :

Não podemos empregar as fórmulas de cálculo do raio de convergência fornecidas no Teorema 11, pois todos os coeficientes das potências ímpares de  $(x-5)$  se anulam [note que, com  $k = 2n$ , a série pode ser escrita na forma  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-5)^k$ , com  $a_k = 0$  se  $k = 1, 3, 5, \dots$  e  $a_k = \frac{(-1)^{k/2}}{64^{k/2} (k/2)^2}$  se  $k = 2, 4, 6, \dots$ ]. Nesse caso, empregamos o critério da razão ou o da raiz para determinar os valores de  $x$  que tornam convergente a série  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , onde  $c_n = \frac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{64^n n^2}$ .

Para  $x \neq 5$  (ponto no qual a série é obviamente convergente), o critério da razão fornece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)^{2(n+1)}}{64^{n+1} (n+1)^2} \cdot \frac{64^n n^2}{(x-5)^{2n}} \right| = \frac{(x-5)^2}{64} \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left( \frac{n}{n+1} \right)^2}^1 < 1 \\ &\Rightarrow (x-5)^2 < 64 \Rightarrow -8 < x-5 < 8 \Rightarrow -3 < x < 13. \end{aligned}$$

O mesmo resultado é obtido com o critério da raiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{64^n n^2} \right|} = \frac{(x-5)^2}{64} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}} < 1 \Rightarrow (x-5)^2 < 64 \Rightarrow -3 < x < 13,$$

uma vez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n^2}{n}} = e^{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{2(0)} = e^0 = 1$ .

Por outro lado,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{64^n n^2} \Big|_{x=-3 \text{ ou } 13} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  é absolutamente convergente.

Resposta:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{64^n n^2}$  converge no intervalo  $[-3, 13]$ , sendo  $R = 8$ .

**vii)** da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}$  :

Nesta série nota-se a ausência de toda potência  $(x-5)^k$  em que  $k$  não seja múltiplo de 3, motivo pelo qual novamente convém empregar os critérios da razão ou da raiz.

Com  $c_n = \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}$ , e para  $x \neq 5$ , obtemos, pelo critério da razão,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)^{3(n+1)}}{64^{n+1} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{64^n \sqrt{n}}{(x-5)^{3n}} \right| = \frac{|x-5|^3}{64} \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sqrt{\frac{n}{n+1}}}^1 < 1 \\ &\Rightarrow |x-5|^3 < 64 \Rightarrow |x-5| < \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow -4 < x-5 < 4 \Rightarrow 1 < x < 9. \end{aligned}$$

Esse mesmo resultado é obtido pelo critério da raiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}} \right|} = \frac{|x-5|^3}{64} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}}} < 1 \Rightarrow |x-5|^3 < 64 \Rightarrow 1 < x < 9$$

pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n})^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \sqrt{n}}{n}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$ .

Além disso,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}} \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  (uma série harmônica de ordem menor ou igual a 1) é divergente.



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}} \Big|_{x=9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  é uma série alternada convergente.

Resposta:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}$  converge no intervalo  $(1, 9]$ , sendo  $R = 4$ .

### Teorema 12

Uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  com raio de convergência  $R > 0$  apresenta as seguintes propriedades no intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ :

- a) sua soma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x)$  é uma função contínua;
- b) ela pode ser diferenciada termo a termo para se obter  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = f'(x)$ ;
- c) ela pode ser integrada termo a termo para se obter  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \int f(x) dx$ .

Observe que, de acordo com esse mesmo teorema, a série de potências produzida por diferenciação pode ser novamente diferenciada para se obter uma nova série de potências que converge para  $f''(x)$  no mesmo intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . Ou seja, diferenciações sucessivas produzem as derivadas  $f^{(n)}(x)$   $[n = 1, 2, \dots]$ , todas definidas no mesmo intervalo. Isso significa que a soma de uma série de potências centrada em  $x_0$  com raio de convergência  $R > 0$  é, no intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , uma função infinitamente diferenciável, isto é, uma função que pode ser diferenciada um número qualquer de vezes.

## 1.5 Séries de Taylor e de MacLaurin

### Teorema 13

Os coeficientes de uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  com raio de convergência  $R > 0$  são dados por  $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ , onde  $f(x)$  é a função para a qual aquela série converge no seu intervalo de convergência. Para essa função, temos então a seguinte série:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots$$

Para estabelecer esse teorema, é fundamental o fato de a soma  $f(x)$  de uma série de potências com raio de convergência não nulo ser, como garante o Teorema 12, uma função infinitamente diferenciável no intervalo de convergência.

Considere agora qualquer função  $g(x)$  que seja infinitamente diferenciável em  $x_0$ . Podemos formar a seguinte série, com a mesma forma daquela acima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

denominada série de Taylor de  $g(x)$  relativa a  $x_0$  (se  $x_0 = 0$ , ela é chamada de série de MacLaurin).

Surge a questão de saber sob que condições essa série converge para  $g(x)$ . Não vamos entrar aqui nos detalhes dessas condições (existe teorema especificando condições suficientes para a convergência), mas é importante saber o seguinte:

- A série de Taylor pode convergir apenas em parte, isto é, num intervalo do domínio de  $g(x)$ , ou mesmo apenas no ponto  $x = x_0$ . Por exemplo, mais adiante veremos que  $g(x) = 1/(1+x^2)$  (cujo domínio é todo o eixo real) é convergente apenas para  $x \in (-1, 1)$ .
- Ainda que a série de Taylor convirja em todo o domínio da função  $g(x)$ , a série pode não coincidir com a função em parte do domínio. Por exemplo, se  $g(x) = |x-1|$  (igual a  $x-1$  se  $x \geq 1$  e a  $1-x$  se  $x \leq 1$ ), então  $g(0) = 1$ ,  $g'(0) = [d(1-x)/dx]_{x=0} = -1$ , e  $g^{(n)}(0)|_{n \geq 2} = 0$ ; logo, a série de MacLaurin é  $g(0) + g'(0)x = 1 - x$ , que é diferente de  $g(x)$  se  $x > 1$ .

Há vários modos para calcular uma série de Taylor. Vejamos alguns deles, todos em relação a  $x = 0$  (séries de MacLaurin):

**Modo 1)** Naturalmente, um modo consiste no uso direto da fórmula da série de Taylor fornecida no Teorema 13. Os detalhes dos próximos quatro exemplos, relacionados a algumas das funções elementares, são apresentados no Prob. 18):

$$\text{i)} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

$$\text{ii)} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

$$\text{iii)} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

$$\text{iv)} \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots \quad (0 < x \leq 2) ,$$

ou, em função da variável  $u = x - 1$  ,

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots \quad (-1 < u \leq 1) .$$

$$\text{v)} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

**Modo 2)** Séries de Taylor conhecidas podem ser usadas para calcular novas séries de Taylor. Os seguintes exemplos são baseados nas séries de Taylor apresentadas acima:

$$\text{i)} \quad x^4 e^{-3x} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{4+n}}{n!} = x^4 - 3x^5 + \frac{9x^6}{2} - \frac{27x^7}{6} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

$$\text{ii)} \quad x^3 \sin x^2 = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+5}}{(2n+1)!} = x^5 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{13}}{5!} - \frac{x^{17}}{7!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

**Modo 3)** A série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ , que converge para  $1/(1-x)$  se  $|x| < 1$ , pode ser empregada para se obter mais facilmente a série de Taylor de algumas funções:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \text{ se } |(-x^2)| = x^2 < 1, \text{ i.e., } -1 < x < 1 .$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x^2}{3-4x} = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{1-(4x/3)} = \frac{x^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (4x/3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{x^2}{3} + \frac{4x^3}{3^2} + \frac{4^2 x^4}{3^3} + \frac{4^3 x^5}{3^4} + \cdots$$

se  $|4x/3| < 1$ , i.e.,  $-3/4 < x < 3/4$  .

**Modo 4)** De grande auxílio no desenvolvimento de certas funções em série de Taylor é o Teorema 12. Nos três exemplos que seguem, para se obter o desenvolvimento em série da função  $f(x)$ , primeiramente desenvolvemos  $f'(x)$  em série e depois integramos essa série termo a termo. Esse método funciona bem, obviamente, quando é mais fácil expandir  $f'(x)$  do que  $f(x)$ :

$$\text{i)} \quad f(x) = \ln(1+x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \text{ se } |-x| < 1, \text{ isto é, } x \in (-1, 1) .$$

Integrando, obtemos  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$ , onde, substituindo  $x = 0$ , obtemos

$$\underbrace{f(0)}_{\ln 1 = 0} = \underbrace{\left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{x=0}}_0 + c \Rightarrow 0 = c.$$

Sempre determinamos tais constantes de integração substituindo o ponto  $x = x_0$  em que a série está centrada, pois, nele, anulando-se a série, o cálculo delas é facilitado.

O Teorema 12 garante que a série de  $f(x)$  obtida por integração permanece válida, pelo menos, no intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , igual a  $(-1, 1)$  no caso. Mas a integração pode melhorar a convergência nos extremos desse intervalo, o que nos leva à tarefa extra de verificar se isso de fato aconteceu:

- em  $x = -1$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_{x=-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k+1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ , que é uma série divergente, como há de ser, pois não existe  $f(-1) = \ln 0$ .

- em  $x = 1$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ , uma série alternada convergente.

Temos então que

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \text{ com } x \in (-1, 1],$$

onde, na passagem (\*), mudamos o índice do somatório para  $n = k + 1$  para escrever a série na forma já obtida acima, no Exemplo (iv) do Modo 1.

Foi dito logo acima que a integração pode melhorar a convergência, o que se entende pelo fato de que a integral de uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  convergente é  $\sum_{n=0}^{\infty} [a_n / (n+1)] x^{n+1}$ , cujos coeficientes, sendo iguais aos da série original divididos por  $n+1 \rightarrow \infty$ , tendem comparativamente a zero mais rapidamente, o que melhora a convergência. Já a diferenciação produz a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ , cujos coeficientes, sendo os originais multiplicados por  $n \rightarrow \infty$ , tendem a formar uma série com tendência menor a convergir.

$$\text{ii) } f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ (série já obtida acima, válida para } -1 < x < 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c. \text{ Como essa série é convergente para } x = \pm 1 \text{ (segundo o critério para}$$

$$\text{séries alternadas), e } c = 0 \text{ [pois } f(0) = 0], \text{ temos, finalmente, que } f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$\text{iii) } f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \text{ se } -1 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

Como essa série é divergente para  $x = \pm 1$ , e  $c = 0$  [pois  $f(0) = 0$ ], obtemos finalmente  $f(x) =$

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

Uma aplicação das séries de Taylor é o cálculo da integral de uma função cuja primitiva não é conhecida na forma de uma expressão *fechada* (isto é, em termos das funções elementares). Por exemplo, uma primitiva de  $e^{x^2}$  é

$$\begin{aligned} \int e^{x^2} dx &= \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x + \frac{x^3/3}{1!} + \frac{x^5/5}{2!} + \frac{x^7/7}{3!} + \frac{x^9/9}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

obtida na forma de série infinita. Usando-a, podemos calcular, por exemplo, a integral definida:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/(2n+1)}{n!} = 1 + \frac{1/3}{1!} + \frac{1/5}{2!} + \frac{1/7}{3!} + \frac{1/9}{4!} + \dots$$

## 1.6 Exercícios

1. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , caso exista, sendo:

$$\text{a) } a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2} \quad \text{b) } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{c) } a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \quad \text{d) } a_n = \sqrt[n]{n}$$

2. Calcule a soma da série:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k & \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} & \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} & \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} & \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{7^k} \\ \text{f) } \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1} 3^{1-k} & \quad \text{g) } 0,032 + 0,0032 + 0,00032 + \dots \end{aligned}$$

3. Usando o critério do termo geral, mostre a divergência de:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k^2 \pi}{2} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} k \ln \frac{k+5}{k+2}$$

4. Usando o critério para série alternada, mostre a convergência de:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{1}{k} \quad \text{c) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{k^4 + 3} \quad \text{d) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k}{(k+1)e^{k+1}}$$

5. Usando o critério da integral, determine a convergência de:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \quad \text{b) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$$

6. Usando o critério da integral, determine a divergência de:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1} \quad \text{b) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{\ln k}} \quad \text{c) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \quad \text{d) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k \ln k)(\ln \ln k)}$$

7. Usando o critério da comparação, mostre a convergência de:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k^3})} \quad \text{b) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3 \sqrt{k}} \quad \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \quad \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{3/2}}$$

8. Usando o critério da comparação, mostre a divergência de:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2 - 3k - 4} & \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2 + 3k + 4} & \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2 - 3k + 4} & \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-9}{k^2 - 3k + 4} \\ \text{e) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} & \quad \text{f) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} \ln k} & \text{g) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln k}} \end{aligned}$$

9. Usando o critério da comparação, determine se é convergente ou divergente:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^3 - 1} \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^6 - 4k^5 + 3k - 6}{3k^9 + 2k^2 - 2k + 1} \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2 - 3k + 4}$$

10. Usando o critério da comparação no limite, determine se é convergente ou divergente:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - k + 3}{k^3 + 2k} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{2k^3 - 1} \quad \text{c) } \sum_{k=4}^{\infty} \frac{k-3}{(k+2)\sqrt{k+1}} \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9k + 2(3^k)}{5(2^k) - 4}$$

11. Usando o critério da razão, determine a convergência ou divergência de:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$       b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + k}{2^k + 1}$       c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k}{k^k}$       d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4-\pi)^k}{k^3 + 4}$

12. Usando o critério da raiz, mostre a convergência de:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$       b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^{k^2}$

13. Usando o critério da razão, determine  $x$  para que a série seja convergente:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^3 + 1}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{n!}$       d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n-1}}$   
e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+6)^n \ln(n+1)}$       f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$

14. Classifique, justificando, se são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}}$       b)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{4^k}$       c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}$

15. (Séries telescópicas) Seja  $a_k$  uma sequência convergente e denote  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \equiv a$ . Mostre que

a)  $\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_j - a$       b)  $\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+2}) = a_j + a_{j+1} - 2a$   
c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$       d)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}$       e)  $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{9}$   
f)  $\sum_{k=6}^{\infty} \left( \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) = \frac{1}{25}$       g)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sin \left( \frac{k\pi + \pi}{3k+6} \right) - \sin \left( \frac{k\pi}{3k+3} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$   
h)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+4)} = \frac{1}{12}$       i)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$       j)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{(k^2-1)^2} = \frac{5}{4}$   
k)  $\sum_{k=2}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - \sqrt[k+1]{k+1}) = \sqrt{2} - 1$       l)  $\sum_{k=4}^{\infty} \left( k \ln \frac{k+3}{k-3} - k \ln \frac{k+4}{k-2} - \ln \frac{k+4}{k-2} \right) = 4 \ln 7 - 6$

16. Determinar se são convergentes ou divergentes:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-4}{\sqrt{k^6-3k-5}}$       b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-1000}{k 2^k}$       c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k+1}$       d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^9}{k! - k^2}$   
e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{2k+3}$       f)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^2 k - 1}{k + \ln^2 k}$       g)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k - 1}{k \ln^2 k}$       h)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k+1}{2k} \right)^k$   
i)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 + \cos \sqrt{k^3}}{k+1}$       j)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k+2}$       k)  $\sum_{k=1}^{\infty} (2/5)^{\ln k}$

17. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3} (x-7)^n}{(n+5)^2}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{(n+1)^2 + 2}$   
d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (x-1)^n}{n!}$       e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n (x-2)^n}{2^n}$       f)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{3n}}{8^n \ln(n+2)}$

18. Calcule as séries de MacLaurin, e os correspondentes intervalos de convergência, de

- a)  $e^x$  em torno de  $x = 0$       b)  $\cos x$  em torno de  $x = 0$       c)  $\sin x$  em torno de  $x = 0$   
d)  $\ln x$  em torno de  $x = 1$

19. Desenvolva as seguintes funções numa série de MacLaurin, fornecendo o intervalo de convergência:

a)  $\frac{x}{(1-x)^2}$       b)  $\frac{x^2}{(1-x)^3}$       c)  $\frac{x+1}{3x+2}$

20. Identifique as seguintes funções:

a)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$       b)  $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n$       c)  $h(x) = \sum_{n=3}^{\infty} x^{2n+1}$   
d)  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n+1}$

21. Desenvolva as seguintes funções numa série de MacLaurin, fornecendo o intervalo de convergência:

a)  $\int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$       b)  $\int_0^x \frac{\sin t^2}{t^2} dt$       c)  $\int_0^x \ln(1 + 125t^3) dt$

22. Calcule a soma das seguintes séries:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{-2n}}{n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!}$       c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

23. Se  $f(x) = \sin x^3$ , calcule  $f^{(15)}(0)$ .

24. Calcule a soma da série no Exemplo (iv) do Teorema 9.

## 1.7 Soluções dos Exercícios

### Prob. 1

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{2}{n^3}} = \frac{1}{4}$   
b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$   
c) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$   
d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}\right)} \stackrel{(l'H)}{=} e^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1}\right)} = e^0 = 1$

### Prob. 2

Neste problema fazemos uso da fórmula da soma da série geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  se  $|q| < 1$ .

a)  $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{(1/3)^2}{1 - 1/3} = \frac{1}{6}$   
b)  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$   
c)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{2}{3}$   
d)  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-1/2})^k = \frac{1}{1 - 2^{-1/2}} = \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$   
e)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{7^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-2^2/7)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2^2/7)^1}{1 - (-2^2/7)} = \frac{-2}{7+4} = -\frac{2}{11}$

$$\text{f)} \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1} 3^{1-k} = \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2/3)^2}{1 - 2/3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4/9}{1/3} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad 0,032 + 0,0032 + 0,00032 + \dots &= 0,032 [(10^{-1})^0 + (10^{-1})^1 + (10^{-1})^2 + \dots] = 0,032 \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-1})^k \\ &= 0,032 \cdot \frac{1}{1 - 10^{-1}} = 0,032 \cdot \frac{10}{9} = \frac{32}{900} \end{aligned}$$

### Prob. 3

Neste problema, basta mostrar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  não existe ou, existindo, que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ .

$$\text{a)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{k^2 \pi}{2} \text{ não existe } (a_k \text{ oscila nos valores } 0 \text{ e } 1)$$

$$\text{b)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{k^3} \stackrel{(\text{rH})}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k \ln 2}{3k^2} \stackrel{(\text{rH})}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k \ln^2 2}{6k} \stackrel{(\text{rH})}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k \ln^3 2}{6} = \infty \text{ (não existe)}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k \ln \frac{k+5}{k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{k+5}{k+2}}{\frac{1}{k}} \stackrel{(\text{rH})}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3}{(k+2)(k+5)}}{-k^{-2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2}{k^2 + 7k + 10} = 3 \neq 0$$

### Prob. 4

Aplicamos o critério de convergência para uma série alternada  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  [ $a_k > 0$ ], que consiste em verificar se a sequência  $a_k$  é decrescente e com limite igual a zero. Abaixo, cada sequência  $a_k$  dada é claramente decrescente (o que, caso se duvide, pode ser confirmado constatando que a derivada da função  $f(k) = a_k$  é negativa). Assim, mostraremos a convergência verificando tão-somente que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

$$\text{a)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{1} = 0 \checkmark$$

$$\text{b)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{k} = \sin \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \right) = \sin 0 = 0 \checkmark$$

$$\text{c)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3}{k^4 + 3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k + \frac{3}{k^3}} = 0 \checkmark$$

$$\text{d)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k k}{(k+1)e^{k+1}} = \frac{1}{e} \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{(2/e)^k}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\rightarrow 1} = 0 \checkmark$$

### Prob. 5

Observe que, em cada integral  $\int_K^{\infty} f(x) dx$  usada, a função  $f(x)$  é contínua, positiva, decrescente e tal que  $f(k) = a_k$  (o termo geral da série) para  $k \geq K$ , assim satisfazendo as condições do critério da integral. Neste problema, basta mostrar que essa integral imprópria existe.

$$\text{a)} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x \Big|_1^{\infty} = \arctan \infty - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b)} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\ln^{-1} x \Big|_2^{\infty} = -\frac{1}{\ln \infty} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

### Prob. 6

Devemos mostrar que a integral imprópria construída segundo o critério da integral (v. o início da resolução do Prob. 5) não existe.

$$\text{a)} \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2} (\underbrace{\ln \infty}_{\infty} - \ln 2) = \infty$$

$$\text{b)} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx = 2\sqrt{\ln x} \Big|_2^{\infty} = 2 (\underbrace{\sqrt{\ln \infty}}_{\infty} - \sqrt{\ln 2}) = \infty$$

$$\text{c)} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| \Big|_2^{\infty} = \underbrace{\ln \ln \infty}_{\infty} - \ln \ln 2 = \infty$$

$$d) \int_3^{\infty} \frac{1}{(x \ln x) \ln \ln x} dx = \ln \ln \ln x \Big|_3^{\infty} = \underbrace{\ln \ln \ln \infty}_{\infty} - \ln \ln \ln 3 = \infty \quad (\text{note que } \ln \ln x > 0 \text{ se } x \geq 3)$$

### Prob. 7

Pelo critério da comparação entre séries de termos gerais positivos, para mostrar que uma série é convergente, basta mostrar que, assintoticamente (i.e., para  $k$  maior que algum natural, ou  $k \rightarrow \infty$ ), o seu t.g. (termo geral) é menor ou igual que o t.g. de alguma sér. conv. (série convergente).

$$a) \frac{1}{\sqrt{k}(1 + \sqrt{k^3})} \leq \frac{1}{\sqrt{k}(1 - 1 + \sqrt{k^3})} = \frac{1}{k^2} : \text{t.g. de uma sér. conv.}$$

$$b) \frac{1}{k^2 \ln k} \Big|_{k \geq 3} \leq \frac{1}{k^2} : \text{t.g. de uma sér. conv.}$$

$$c) \frac{\ln k}{k^3 \sqrt{k}} \leq \frac{k}{k^3 \sqrt{k}} = \frac{1}{k^{2,5}} : \text{t.g. de uma sér. conv. } (*)$$

$$d) \frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{1,5}} : \text{t.g. de uma sér. conv.}$$

$$e) \frac{\ln k}{k^{3/2}} \leq \frac{k^{0,2}}{k^{1,5}} = \frac{1}{k^{1,3}} : \text{t.g. de uma sér. conv.}$$

### Prob. 8

Pelo critério da comparação entre séries de termos gerais positivos, para mostrar que uma série é divergente, basta mostrar que, assintoticamente (i.e., para  $k$  maior que algum inteiro positivo), o seu t.g. é maior ou igual que o t.g. de alguma sér. div. (série divergente).

$$a) \frac{2k+1}{k^2-3k-4} \geq \frac{2k+1-1}{k^2-3k-4+3k+4} = \frac{2}{k} : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

$$b) \frac{2k+1}{k^2+3k+4} \geq \frac{2k+1-1}{k^2+3k^2+4k^2} = \frac{1}{4k} : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

$$c) \frac{2k-1}{k^2-3k+4} \geq \frac{2k-k}{k^2-3k+3k+4k^2} = \frac{1}{5k} : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

$$d) \frac{2k-9}{k^2-3k+4} \geq \frac{2k-k}{k^2-3k+3k+4k^2} = \frac{1}{5k} \quad (k \geq 9) : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

$$e) \frac{1}{(\ln k)^2} \geq \frac{1}{(\sqrt{k})^2} = \frac{1}{k} : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{k} \ln k} \geq \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{k}} = \frac{1}{k} : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

$$g) \frac{1}{\sqrt{\ln k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}} : \text{t.g. de uma sér. div.}$$

### Prob. 9

$$a) \underline{\text{Conv.}}, \text{ pois } \frac{k+1}{2k^3-1} \leq \frac{k+k}{2k^3-k^3} = \frac{2}{k^2} \text{ é o t.g. de uma sér. conv.}$$

$$b) \underline{\text{Conv.}}, \text{ pois } \frac{2k^6-4k^5+3k-6}{3k^9+2k^2-2k+1} \leq \frac{2k^6-4k^5+4k^5+3k^6-6+6}{3k^9+2k^2-2k^2-2k^9+1-1} = \frac{5}{k^3} \text{ é o t.g. de uma sér. conv.}$$

$$c) \underline{\text{Div.}}, \text{ pois } \frac{2k-1}{k^2-3k+4} \geq \frac{2k-k}{k^2-3k+3k+4k^2} = \frac{1}{5k} \text{ é o t.g. de uma sér. div.}$$

---

(\*)  $\forall p > 0$ ,  $\ln k < k^p$  para  $k$  suficientemente grande, pois essas duas funções são estritamente crescentes e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k^p} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{p k^{p-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^p} = 0 \text{ se } p > 0.$$

Assim,  $\ln k$  é menor que  $k^2, k, k^{1/2}, k^{0,2}$  e  $k^{0,001}$  para  $k$  maiores que algum real.



**Prob. 10**

a) Com  $a_k = \frac{4k^2 - k + 3}{k^3 + 2k} > 0$  e  $b_k = \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k} > 0 \quad \forall k \geq 1$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k^2 - k + 3}{k^3 + 2k} \cdot \frac{1}{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k^3 - k^2 + 3k}{k^3 + 2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4 - 1/k + 3/k^2}{1 + 2/k^2} = 4 : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que a série  $\sum_k b_k$  diverge (por ser harmônica de ordem  $p = 1$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também diverge.

b) Com  $a_k = \frac{k + \sqrt{k}}{2k^3 - 1} > 0$  e  $b_k = \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2} > 0 \quad \forall k \geq 1$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k + \sqrt{k}}{2k^3 - 1} \cdot \frac{1}{1/k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3 + k^{5/2}}{2k^3 - 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/\sqrt{k}}{2 - 1/k^3} = \frac{1}{2} : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que a série  $\sum_k b_k$  converge (por ser harmônica de ordem  $p = 2$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também converge.

c) Com  $a_k = \frac{k - 3}{(k + 2)\sqrt{k + 1}} > 0$  e  $b_k = \frac{k}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} > 0 \quad \forall k \geq 4$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k - 3}{(k + 2)\sqrt{k + 1}} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - 3/k)\sqrt{k}}{(1 + 2/k)\sqrt{k}\sqrt{1 + 1/k}} = 1 : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que a série  $\sum_k b_k$  diverge (por ser harmônica de ordem  $p = 1/2$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também diverge.

d) Com  $a_k = \frac{9k + 2(3^k)}{5(2^k) - 4} > 0$  e  $b_k = \frac{3^k}{2^k} = \left(\frac{3}{2}\right)^k > 0 \quad \forall k \geq 0$ , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{9k + 2(3^k)}{5(2^k) - 4} \cdot \frac{2^k}{3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{9k(2^k) + 2(2^k 3^k)}{5(2^k 3^k) - 4(3^k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{9k/3^k} + 2}{5 - \cancel{4/3^k}} = \frac{2}{5} : \text{ finito.}$$

Logo, pelo critério da comparação no limite, uma vez que a série  $\sum_k b_k$  diverge (por ser uma série geométrica de razão  $q = 3/2 < 1$ ), a série  $\sum_k a_k$  dada também diverge.

**Prob. 11**

Seja  $L \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k|$ , onde  $a_k$  é o termo geral da série dada. Abaixo, os resultados  $L < 1$  e  $L > 1$  indicam séries convergentes e divergentes, respectivamente. (O símbolo de módulo será omitido no caso de termo geral positivo.)

$$\text{a) } L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}/(k+1)!}{(-1)^k/k!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{k!}}{\cancel{k!}(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

$$\text{b) } L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^{k+1} + k + 1}{2^{k+1} + 1} \cdot \frac{2^k + 1}{3^k + k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{k+1} + k + 1}{3^k}}{\frac{2^{k+1} + 1}{2^k}} \cdot \frac{\frac{2^k + 1}{3^k}}{\frac{3^k + k}{3^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{k+1}{3^k}}{2 + \frac{1}{2^k}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^k}}{1 + \frac{k}{3^k}} = \frac{3}{2} > 1$$

$$\text{c) } L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)! 2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k! 2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^k \cdot \frac{(k+1)\cancel{k!}}{\cancel{k!} 2} \cdot \frac{2}{k+1} = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + 1/k)^k} = 2 \cdot \frac{1}{e} < 1$$

$$\text{d) } L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4 - \pi)^{k+1}}{(k+1)^3 + 4} \cdot \frac{k^3 + 4}{(4 - \pi)^k} = (4 - \pi) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3 + 4}{(k+1)^3 + 4} = (4 - \pi) \cdot 1 < 1$$

**Prob. 12**

Seja  $L \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ , onde  $a_k$  é o termo geral da série dada. Abaixo, os resultados  $L < 1$  e  $L > 1$  indicam séries convergentes e divergentes, respectivamente. (O símbolo de módulo será omitido no caso de termo geral positivo.)

a)  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/\sqrt[k]{k^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/k = 0 < 1$

b)  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/k)^k} = \frac{1}{e} < 1$

**Prob. 13**

Segundo o critério da razão, os valores de  $x$  que tornam a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$  convergente são os que satisfazem a inequação  $\Phi(x) < 1$ , onde  $\Phi(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{n+1}(x)/\varphi_n(x)|$ . Uma investigação separada é necessária para verificar se a convergência da série também ocorre com os valores de  $x$  que satisfazem a equação  $\Phi(x) = 1$ .

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}/(n+1)}{(x-3)^n/n} \right| = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{n}^1}{n+1} = |x-3| \cdot 1 < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow x > 2 \text{ e } x < 4.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \Big|_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , que é uma série alternada convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \Big|_{x=4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , que é divergente.

Resposta:  $x \in [2, 4)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)^3+1} \div \frac{nx^n}{n^3+1} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overrightarrow{n+1}^{\rightarrow 1}}{n} \cdot \frac{\overrightarrow{n^3+1}^{\rightarrow 1}}{(n+1)^3+1} = |x| < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^3+1} \Big|_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\underbrace{n^3+1}_{\rightarrow 0}}$ , que é uma série alternada convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^3+1} \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \left[ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} \right]$  é convergente.

Resposta:  $x \in [-1, 1]$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(n+1)+1]x^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{(2n+1)x^n}{n!} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overrightarrow{2n+3}^{\rightarrow 1}}{2n+1} \cdot \frac{\overrightarrow{n!}^{\overrightarrow{1/(n+1)} \rightarrow 0}}{(n+1)!} = 0 \forall x.$

Resposta:  $x \in \mathbb{R}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+2}/3^n}{x^{n+1}/3^{n-1}} \right| = \frac{|x|}{3} < 1 \Rightarrow |x| < 3$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n-1}} \Big|_{x=-3} = 9 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}$ , que é uma série divergente.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n-1}} \Big|_{x=3} = \sum_{n=2}^{\infty} 9$ , que é uma série divergente.

Resposta:  $x \in (-3, 3)$

Outro modo, baseado no fato de que a série dada é a uma série geométrica, é o seguinte:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n-1}} = 3^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$ , que é convergente se  $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ , isto é, se  $|x| < 3$ .

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+6)^n \ln(n+1)}{(x+6)^{n+1} \ln(n+2)} \right| = \frac{1}{|x+6|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\ln(n+1)}^{=1 \text{ (l'H)}}}{\ln(n+2)} < 1 \Rightarrow |x+6| > 1 \Rightarrow x < -7 \text{ ou } x > -5$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+6)^n \ln(n+1)} \Big|_{x=-7} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\underbrace{\ln(n+1)}_{\rightarrow 0}}$ , que é uma série alternada convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+6)^n \ln(n+1)} \Big|_{x=-5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \left[ \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \right]$  é div.

Resposta:  $x \in (-\infty, -7] \cup (-5, \infty)$

f)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{x}{1-x} \right)^n$ . Essa série geométrica é convergente se  $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$ , ou  $|x-1| > |x|$  (inequação que também se obtém pelo critério da razão). Como os modulandos mudam de sinal em  $x=0$  e  $x=1$ , convém resolver a inequação nos intervalos separados por esses valores de  $x$ .

No intervalo  $x < 0$  :  $-x+1 > -x$ , ou  $1 > 0$ , que é verídico  $\forall x < 0$ .

No intervalo  $(0, 1)$  :  $-x+1 > x$ , ou  $x < 1/2$ ; logo,  $x \in (0, 1/2)$ .

No intervalo  $x > 1$  :  $x-1 > x$ , ou  $-1 > 0$ , um absurdo; logo, não existe solução no intervalo  $(1, \infty)$ .

Além disso,  $\left| \frac{x}{1-x} \right|_{x=0} = 0 < 1$ , e  $\left| \frac{x}{1-x} \right|_{x=1}$  não existe.

A união dos valores de  $x$  que satisfazem a inequação fornece a resposta:  $x < 1/2$ .

#### Prob. 14

a) Vejamos a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}$ ; vemos, por comparação, que essa série é divergente, pois  $\frac{1}{\sqrt{k^2+2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k^2+2k^2}} = \frac{1}{k\sqrt{3}}$ , que é o t.g. de uma sér. div. Assim,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}}$  não converge absolutamente; mas essa série é convergente, o que se deduz do critério para série alternada  $\left[ \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}} \right]$  é uma sequência positiva, decrescente e tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}} = 0$ . Logo, a série dada é condicionalmente convergente.

b) Vejamos a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k k^2}{4^k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$ ; ela é convergente segundo o critério da razão:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2/4^{k+1}}{k^2/4^k} = \frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k+1}{k} \right)^2 = \frac{1}{4} < 1$ . Ou seja, a série dada é absolutamente convergente.

c) A série é divergente segundo o critério do termo geral:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} (\sin \theta) / \theta = 1 \neq 0$ , onde fizemos a mudança de índice  $1/\sqrt{k} \equiv \theta$  ( $\rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ ).

#### Prob. 15

a)  $\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=j}^n a_k - \sum_{k=j}^n a_{k+1} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [a_j + \cancel{(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_n)}] - [\cancel{(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_n)} + a_{n+1}] \right\} = a_j - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}_a = a_j - a$

b)  $\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=j}^n a_k - \sum_{k=j}^n a_{k+2} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [a_j + a_{j+1} + \cancel{(a_{j+2} + a_{j+3} + \dots + a_n)}] - [\cancel{(a_{j+2} + a_{j+3} + \dots + a_n)} + a_{n+1} + a_{n+2}] \right\} = a_j + a_{j+1} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}_a - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2}}_a = a_j + a_{j+1} - 2a$

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1 - 0 = 1$

d)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{-1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k-1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{k-1}}_{a_{k-1}} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \right)$   
 $= (1/2) \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_{k+1}) = (1/2) (a_1 + a_2 - 2 \lim_{k \rightarrow \infty} a_k) = (1/2) (1 + 1/2 - 0) = 3/4$

e)  $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=3}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{a_{k+1}} \right] = \sum_{k=3}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_3 - \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}_0 = \frac{1}{9}$

f)  $\sum_{k=6}^{\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{4k+1}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{4k+5}}_{a_{k+1}} \right) = \sum_{k=6}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_6 - \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}_0 = \frac{1}{25}$

g)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi + \pi}{3k+6}\right)}_{a_{k+1}} - \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{3k+3}\right)}_{a_k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k - a_1 = \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

h)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \underbrace{\frac{1/6}{3k-2}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1/6}{3k+4}}_{a_{k+2}} \right) = a_0 + a_1 - 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/6}{3k-2} = \frac{1/6}{-2} + \frac{1/6}{1} - 2 \cdot 0 = \frac{1}{12}$

i)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \right) - \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{b_k} - \underbrace{\frac{1}{k+2}}_{b_{k+1}} \right) \right]$   
 $= \frac{1}{2} \left( a_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{2} \left( b_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

j)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{(k^2-1)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{1}{(k-1)^2}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{a_{k+2}} \right] = a_2 + a_3 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k-1)^2} = 1 + \frac{1}{4} - 0 = \frac{5}{4}$

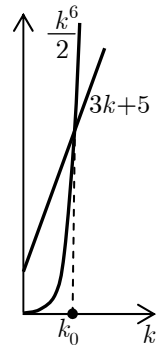
k)  $\sum_{k=2}^{\infty} \left( \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{a_k} - \underbrace{\sqrt[k+1]{k+1}}_{a_{k+1}} \right) = a_2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \sqrt{2} - 1$

l)  $\sum_{k=4}^{\infty} \left( k \ln \frac{k+3}{k-3} - k \ln \frac{k+4}{k-2} - \ln \frac{k+4}{k-2} \right) = \sum_{k=4}^{\infty} \left[ \underbrace{k \ln \frac{k+3}{k-3}}_{a_k} - \underbrace{(k+1) \ln \frac{k+4}{k-2}}_{a_{k+1}} \right] = \sum_{k=4}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$   
 $= a_4 - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 4 \ln 7 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{k+3}{k-3}}{k^{-1}} \stackrel{\text{L'H}}{=} 4 \ln 7 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-6}{-k^{-2}} = 4 \ln 7 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6k^2}{k^2-3} = 4 \ln 7 - 6$

### Prob. 16

a) Temos que  $\frac{k-4}{\sqrt{k^6-3k-5}} = \frac{k-4}{\sqrt{k^6-(3k+5)}} \leq \frac{k}{\sqrt{k^6-(k^6/2)}} = \frac{\sqrt{2}}{k^2}$ , que é o termo geral de uma série convergente. Logo, por comparação, a série dada é convergente.

Note que a desigualdade acima é válida se  $3k+5 \leq k^6/2$ , isto é, para  $k$  maior que o valor  $k_0$  indicado na figura à direita.



b) A série é convergente, pois, para ela, o parâmetro  $L$  no teste da razão é menor que 1:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{3(k+1) - 1000}{(k+1)2^{k+1}} \cdot \frac{k 2^k}{3k - 1000} \right| = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{3k - 997}{3k - 1000}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{2} < 1.$$

c) A série é divergente, pois o parâmetro  $L$  no teste da razão é  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{k+1}}{k+2} \cdot \frac{k+1}{e^k} \right| = e > 1$ .

d) A série é convergente segundo o teste da comparação, uma vez que se consegue mostrar que, para  $k$  maior ou igual que algum natural  $l$ , seu termo geral é maior que o termo geral  $b_k$  de uma série convergente. De fato, temos que

$$\frac{k^9}{k! - k^2} \leq \frac{k^9}{k! - k!/2} = \frac{2k^9}{k!} \equiv b_k \quad (\text{se } k^2 \leq k!/2, \text{ isto é, para } k \geq l = 5)$$

e, usando o teste da razão, constatamos que  $b_k$  forma uma série convergente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |b_{k+1}/b_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2(k+1)^9}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2k^9} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \frac{k+1}{k} \right)^9}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\rightarrow 0} = 0 < 1.$$

e) A série é convergente consoante o critério para séries alternadas, pois a sequência  $a_k = (\ln k)/(2k+3)$  é positiva, decrescente e tende a zero quando  $k \rightarrow \infty$ .

**f e g)** Por comparação, constatamos que as séries são divergentes, pois, para  $k$  maior que algum natural  $l$ , temos que

$$\frac{\ln^2 k - 1}{k + \ln^2 k} \geq \frac{\ln^2 k - (\ln^2 k)/2}{k + (\sqrt{k})^2} = \frac{(\ln^2 k)/2}{2k} \geq \frac{1/2}{2k} : \text{ t.g. de série divergente}$$

e

$$\frac{\ln k - 1}{k \ln^2 k} \geq \frac{\ln k - (\ln k)/2}{k \ln^2 k} = \frac{(\ln k)/2}{k \ln^2 k} = \frac{1/2}{k \ln k} : \text{ t.g. de série div. [v. Exemplo (i) na pág. 7].}$$

**h)** Pelo critério da raiz, com  $a_k = \left(\frac{k+1}{2k}\right)^k$ , verificamos que a série é convergente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} < 1.$$

**i)** Por comparação verifica-se que a série é divergente:

$$\frac{5 + \cos \sqrt{k^3}}{k+1} \geq \frac{5-1}{k+1} = \frac{4}{k+1} : \text{ t.g. de série divergente.}$$

**j)**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} : \text{ uma série alternada convergente.}$

**k)** Por comparação verifica-se que a série é divergente:

$$(2/5)^{\ln n} = \frac{1}{(5/2)^{\ln n}} \geq \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n} : \text{ t.g. de série divergente.}$$

ou

$$(2/5)^{\ln n} = [e^{\ln(2/5)}]^{\ln n} = [e^{\ln n}]^{\ln(2/5)} = n^{\ln(2/5)} = \frac{1}{n^{\ln(5/2)}} : \text{ t.g. da série harmônica}$$

divergente de ordem  $p = \ln(5/2) < \ln e = 1$ .

### Prob. 17

**a)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \overbrace{(-1)^n/n}^{a_n} \right] x^n \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n/n}{(-1)^{n+1}/(n+1)} \right| = 1 \Rightarrow x_0 \pm R = -1 \text{ ou } 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n/n \right] x^n \Big|_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} [1/n]$  é divergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n/n \right] x^n \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n/n]$  é uma sér. altern. convergente Resposta:  $(-1, 1)$

**b)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}}_{a_n} (x-7)^n \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{\frac{n+3}{n+4}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left( \frac{n+6}{n+5} \right)^2}_{\rightarrow 1} = 1 \Rightarrow x_0 \pm R = 6 \text{ ou } 8$

$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2} (x-7)^n \right]_{x=6} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}}_{\rightarrow 0}$  é conv., segundo o critério p/ séries alternadas

$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2} (x-7)^n \right]_{x=8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2} \left[ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1,5}} \right]$  é conv. Resposta:  $[6, 8]$

**c)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-2)^n}{(n+1)^2+2}}_{a_n} x^n \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^n}{(n+1)^2+2} \cdot \frac{(n+2)^2+2}{(-2)^{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \pm R = \pm \frac{1}{2}$

$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{(n+1)^2+2} \right]_{x=-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2+2} \left[ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]$  é convergente

$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{(n+1)^2+2} \right]_{x=1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2+2}}_{\rightarrow 0}$  é uma sér. alt. conv. Resposta:  $\left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{5^n}{n!}}_{a_n} (x-1)^n \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty \quad \underline{\text{Resposta: } x \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^n}{2^n}}_{a_n} (x-2)^n &\Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{(1+1/n)^n}}_{\rightarrow 1/e} = 0 \quad \underline{\text{Resposta: } x = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \text{ Para a série } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{3n}}{8^n \ln(n+2)}, \text{ o critério da razão fornece } L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)^{3(n+1)}}{8^{n+1} \ln(n+3)} \cdot \frac{8^n \ln(n+2)}{(x+2)^{3n}} \right| = \\ &= \frac{|x+2|^3}{8} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}}_1 < 1 \Rightarrow |x+2| < 2 \Rightarrow -2 < x+2 < 2 \Rightarrow -4 < x < 0. \\ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{3n}}{8^n \ln(n+2)} \right]_{x=-4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)} : \text{ série alternada condicionalmente convergente} \\ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{3n}}{8^n \ln(n+2)} \right]_{x=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} \left[ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \right] : \text{ divergente} \quad \underline{\text{Resposta: } [-4, 0)} \end{aligned}$$

### Prob. 18

Abaixo,  $R$  é o raio de convergência e  $L$  é o parâmetro definido no critério da razão.

a)  $\underline{f(x) = e^x}$

$$\therefore f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \blacksquare$$

$$\text{Com } a_n = 1/n! : R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow \text{convergência em } \mathbb{R} \blacksquare$$

b)  $\underline{f(x) = \cos x}$

$$f(0) = \cos 0 = 1, \quad f'(0) = -\sin 0 = 0, \quad f''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f'''(0) = -\sin 0 = 0, \\ f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1 \dots \text{ e os valores se repetem.}$$

$$\therefore f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, 4, 8, 12 \dots (\rightarrow k/2 \text{ é par}) \\ -1 & \text{se } k = 2, 6, 10, 14 \dots (\rightarrow k/2 \text{ é ímpar}) \end{cases} = (-1)^{k/2} \text{ para } k \text{ par.}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k \text{ par}} \frac{(-1)^{k/2}}{k!} x^k \stackrel{n=2k}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \blacksquare$$

$$\text{Com } c_n = (-1)^n x^{2n} / (2n)!, \text{ temos que } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}} \right|$$

$$= x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n)! (2n+1)(2n+2)} = x^2 \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow \text{convergência } \forall x \in \mathbb{R} \blacksquare$$

c)  $\underline{f(x) = \sin x}$

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1, \quad f''(0) = -\sin 0 = 0, \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1, \\ f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0 \dots \text{ e os valores se repetem.}$$

$$\therefore f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1, 5, 9, 13 \dots \\ -1 & \text{se } k = 3, 7, 11, 15 \dots \end{cases} = (-1)^{(k-1)/2} \text{ para } k \text{ ímpar.}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k \text{ ímpar}} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!} x^k \stackrel{n=2k+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \blacksquare$$

Com  $c_n = (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)!$ , temos que  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}/c_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} | \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}} |$   
 $= x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = x^2 \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow$  convergência  $\forall x \in \mathbb{R}$  ■

d)  $f(x) = \ln x$

$$f(1) = \ln x|_{x=1} = 0$$

$$f'(1) = x^{-1}|_{x=1} = 1$$

$$f''(1) = -x^{-2}|_{x=1} = -1$$

$$f'''(1) = 2x^{-3}|_{x=1} = 2$$

$$f^{(4)}(1) = -2 \cdot 3 x^{-4}|_{x=1} = -3!$$

$$f^{(5)}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 x^{-5}|_{x=1} = 4!$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{(n)}(1)|_{n \geq 1} = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \overbrace{f(1)}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!} n} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Com  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , obtemos  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n \rightarrow \infty} | \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{n+1}{(-1)^{n+2}} | = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ . Além disso, para  $x = 1 - R = 1 - 1 = 0$ , a série é obviamente divergente, e para  $x = 1 + R = 1 + 1 = 2$ , a série é  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , que é uma série alternada convergente. Logo, a série é convergente para  $x \in (0, 2]$  ■

**Prob. 19**

a)  $\frac{x}{(1-x)^2} = x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ , para  $|x| < 1$ .

b)  $\frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^2}{2} \frac{d}{dx} (1-x)^{-2} = \frac{x^2}{2} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$   
 $= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n$ , para  $|x| < 1$ .

c)  $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x+1}{2} \frac{1}{1-(-3x/2)} = \frac{x+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-3x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{n+1}}{2^{n+1}} + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{2^{n+1}} \right\}$   
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1} x^n}{2^n} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^n} + \frac{(-1)^n 3^n}{2^{n+1}} \right] x^n$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , onde  $a_0 = \frac{1}{2}$  e  $a_n|_{n \geq 1} = -\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^n} + \frac{(-1)^n 3^n}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^{n+1}}$ ,  
para  $|-3x/2| < 1$ , i.e.,  $x \in (-2/3, 2/3)$ .

**Prob. 20**

$$\text{a) } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{d}{dx} \left( x \cdot \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{com } |x| < 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{n-2} = x^2 \frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = x^2 \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= x^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad \text{com } |x| < 1 \end{aligned}$$

$$\text{c) } h(x) = \sum_{n=3}^{\infty} x^{2n+1} = x \cdot \sum_{n=3}^{\infty} (x^2)^n = x \cdot \frac{(x^2)^3}{1-x^2} = \frac{x^7}{1-x^2}, \quad \text{com } |x^2| < 1, \text{ i.e., } |x| < 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } u(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n+1} = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n(x^2)^{n-1} \stackrel{x^2=y}{=} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} ny^{n-1} = x^3 \frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} y^n = x^3 \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{1-y} \right) \\ &= x^3 \cdot \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{x^3}{(1-x^2)^2}, \quad \text{com } |y| = |x^2| < 1, \text{ i.e., } |x| < 1 \end{aligned}$$

**Prob. 21**

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt &= \int_0^x \frac{1}{t} \left[ \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}^{\cos x} - 1 \right] dt = \int_0^x \frac{1}{t} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right] dt = \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!} \right] dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{2n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[ \frac{t^{2n}}{2n} \right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)! 2n} \quad [x \in \mathbb{R}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^x \frac{\sin t^2}{t^2} dt &= \int_0^x \frac{1}{t^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] dt = \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n}}{(2n+1)!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{4n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[ \frac{t^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n+1)!(4n+1)} \quad [x \in \mathbb{R}] \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_0^x \ln[1+(5t)^3] dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} [(5t)^3]^n}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^{3n}}{n} \int_0^x t^{3n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^{3n} x^{3n+1}}{n(3n+1)}.$$

Nesse caso, a máxima variação de  $t$  é dada por  $(5t)^3 \in (-1, 1]$ , ou  $t \in (-1/5, 1/5]$ ; esse é o intervalo de integração máximo possível. Vemos então que  $x$  pode variar no intervalo  $(-1/5, 1/5]$ .

O Prob. 21 também pode ser resolvido diferenciando-se primeiramente, depois substituindo-se  $f'(x)$  por sua série de Taylor, em seguida integrando-se e, finalmente, sabendo que  $f(0) = 0$ , determinando-se a constante de integração; observe esse modo aplicado ao item (a) acima:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)! 2n} + c,$$

onde  $f(0) = c = 0$ .

**Prob. 22**

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{-2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2^{-2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \Big|_{x=2^{-2}} = \ln(1+x) \Big|_{x=1/4} = \ln \frac{5}{4}.$$

Obs.:  $1/4 \in (-1, 1]$ , que é o intervalo de convergência da série de MacLaurin de  $\ln(1+x)$  que foi usada.



$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \left[ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x} - x \right]_{x=\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \bigg|_{x=1} \stackrel{(1)}{=} \arctan x \bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

<sup>(1)</sup>De acordo com o resultado obtido no Exemplo (i) da seção 1.5, página 18 .

### Prob. 23

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(15)}(0)}{15!}x^{15} + \dots = \sin x^3 = x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} - \dots \\ \Rightarrow \frac{f^{(15)}(0)}{15!} &= \frac{1}{5!} \Rightarrow f^{(15)}(0) = \frac{15!}{5!} . \end{aligned}$$

### Prob. 24

Foi dito no texto que a série em questão pode ser visualizada como sendo formada por duas séries geométricas de razão  $1/4$ , uma constituída pelos termos com  $k$  par e a outra, pelos termos com  $k$  ímpar; de fato:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k} &= \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k} + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^{2n}}{6 \cdot 2^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^{2n+1}}{6 \cdot 2^{2n+1}} = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+1}{6 \cdot (2^2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5-1}{6 \cdot 2(2^2)^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{16}{9} . \end{aligned}$$

Mas ela também poder ser desmembrada em duas séries geométricas, uma de razão  $1/2$  e outra de razão  $-1/2$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^k}{6 \cdot 2^k} = \frac{5}{6} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2} + \frac{1}{6} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k}_{\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}} = \frac{5}{6}(2) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9} .$$

Evidentemente, esses desdobramentos da série dada em duas outras séries convergentes são válidos em vista do teorema 2, item (b).

## Capítulo 2

# Resolução de Equação Diferencial Ordinária Linear por Série de Potências

{Ref. [12], seções 17.4.} ou {Ref. [13], seções 6.2 e 6.3}

Sabemos que a solução geral da EDO linear de 1ª ordem

$$y' - 2x y(x) = 0 \quad (2.1)$$

é

$$y(x) = c_1 e^{x^2} = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (2.2)$$

Isso sugere que também possamos resolver a EDO em (2.1) tentando uma série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad (2.3)$$

donde

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} . \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= y' - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} 2 a_{n-2} x^{n-1} \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n a_n - 2 a_{n-2}) x^{n-1} , \end{aligned}$$

uma equação que só pode ser válida para todos os valores de  $x$  se os coeficientes das potências se anularem, isto é:

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad (n a_n - 2 a_{n-2}) \Big|_{n \geq 2} = 0 .$$

Desta segunda equação, deduzimos que

$$a_n = \frac{2}{n} a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2 .$$

Essa equação é chamada de relação de recorrência. Por meio dela, determinamos os coeficientes  $a_n$ . Fazendo  $n$  igual a naturais pares, obtemos

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad a_2 &= a_0 \\ n = 4 : \quad a_4 &= \frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{2} a_0 \\ n = 6 : \quad a_6 &= \frac{2}{6} a_4 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} a_0 \\ n = 8 : \quad a_8 &= \frac{2}{8} a_6 = \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} a_0 \\ &\vdots \\ \therefore a_{2n} &= \frac{1}{n!} a_0 \quad (n \geq 0) . \end{aligned}$$

Agora, com  $n$  igual a ímpares, temos

$$\begin{aligned} n = 3 : \quad a_3 &= \frac{2}{3} a_1 = 0 \\ n = 5 : \quad a_5 &= \frac{2}{5} a_3 = 0 \\ &\vdots \\ \therefore a_{2n+1} &= 0 \quad (n \geq 0) . \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo essas expressões dos coeficientes em (2.3), obtemos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = a_0 e^{x^2} ,$$

que é a solução dada em (2.2), pois o coeficiente  $a_0$  permanece como uma constante arbitrária.

Vejamos mais um exemplo. Considere a seguinte EDO e a sua solução geral (conhecida):

$$4y'' + y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{solução geral } y(x) = c_1 \cos(x/2) + c_2 \sin(x/2) . \quad (2.5)$$

Vamos recalcular essa solução geral pelo método das séries de potências<sup>(\*)</sup>. Os passos são os seguintes:

Passo 1 - Escrevemos a série de potências que se admite como solução e as derivadas dessas séries que serão usadas:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

Passo 2) Na EDO, substituímos  $y, y'$  e  $y''$  pelas respectivas séries para deduzir a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} 0 = 4y'' + y &= 4 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} [4n(n-1) a_n + a_{n-2}] x^{n-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{4n(n-1)} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

---

<sup>(\*)</sup> Estamos começando a estudar um poderoso método que servirá, naturalmente, para obter soluções de EDOs que não sabemos resolver analiticamente; mas os exemplos ora apresentados são educativos: ilustram o método e as manipulações matemáticas costumeiras.

Passo 3) Usamos a relação de recorrência para calcular os coeficientes em termos dos coeficientes que permanecem arbitrários ( $a_0$  e  $a_1$ ):

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{4 \cdot 2(1)} \\ a_3 &= -\frac{a_1}{4 \cdot 3(2)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4 \cdot 4(3)} = \frac{a_0}{4^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{4! 2^4} \\ a_5 &= -\frac{a_3}{4 \cdot 5(4)} = \frac{a_1}{4^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2a_1}{5! 2^5} \\ a_6 &= -\frac{a_4}{4 \cdot 6(5)} = -\frac{a_0}{4^3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{a_0}{6! 2^6} \\ a_7 &= -\frac{a_5}{4 \cdot 7(6)} = -\frac{a_1}{4^3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{2a_1}{7! 2^7} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Passo 4) Deduzimos uma expressão genérica para os coeficientes em termos de  $a_0$  e  $a_1$ . Do passo 3, concluímos que,

$$\text{para } n \geq 0: \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)! 2^{2n}} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2a_1}{(2n+1)! 2^{2n+1}}.$$

Passo 5) Substituímos a expressão genérica dos coeficientes na série de  $y(x)$  para deduzir uma expressão fechada para a solução:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)! 2^{2n}} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a_1}{(2n+1)! 2^{2n+1}} x^{2n+1} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \underbrace{2a_1}_{\equiv a'_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = a_0 \cos \frac{x}{2} + a'_1 \sin \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

que é a solução geral apresentada em (2.5).

Ressalte-se que o passo 4 é frequentemente difícil, e o passo 5 é raramente possível. Por isso, nas resoluções por série de potências que seguem, não nos preocuparemos, ordinariamente, com a implementação do passo 4 (o que seria até elegante, mas este passo, embora de certa importância, está fora dos nossos propósitos aqui, que é o entendimento do método) e do passo 5.

## 2.1 Definições

- Uma função  $f(x)$  é dita analítica no ponto  $x = x_0$  se ela pode ser desenvolvida numa série de Taylor relativa a esse ponto que tenha raio de convergência positivo.
- Considere a EDO linear de 2ª ordem

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = 0, \quad (2.6)$$

que pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y(x) = 0, \quad (2.7)$$

com  $p(x) \equiv B(x)/A(x)$  e  $q(x) \equiv C(x)/A(x)$ . Dizemos que  $x = x_0$  é um ponto ordinário, ou não singular, dessa EDO se, nesse ponto,  $p(x)$  e  $q(x)$  ou suas extensões contínuas<sup>(\*)</sup> são funções analíticas. Um ponto que não é ordinário é dito um ponto singular, ou uma singularidade, da EDO.

---

(\*) *Recordação:*

Uma função  $f(x)$  definida num ponto  $x = x_0$  é dita contínua nesse ponto se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

A extensão contínua de uma função  $f(x)$  num ponto  $x = x_0$  em que ela não é definida, mas tem limite finito, é a função  $g(x)$  que é igual a  $f(x)$  se  $x \neq x_0$  e, naquele ponto, é dada por  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Por exemplo, a extensão contínua da função  $(\sin x)/x$  em  $x = 0$  é a função  $g(x)$  igual a  $(\sin x)/x$  se  $x \neq 0$  e com  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$ .

Exemplos:

i)  $y'' + (\ln x)y(x) = 0$  :  $x = 0$  é ponto singular, pois  $f(x) = \ln x$  não é analítica nesse ponto (não existindo  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , etc,  $f(x)$  não pode ser desenvolvida numa série de Taylor em torno de  $x = 0$ ).

ii)  $y'' + (x-1)^{5/3}y' + y = 0$  :  $x = 1$  é ponto singular, pois  $(x-1)^{5/3}$  não pode ser expandida em potências de  $(x-1)$  [a segunda derivada de  $(x-1)^{5/3}$ , igual a  $(10/9)(x-1)^{-1/3}$ , é infinita em  $x = 1$ ].

$$\text{iii) } xy'' + (\sin x)y' + (1 - \cos x)y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{p(x)}y' + \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x}}_{q(x)}y(x) = 0.$$

Essa EDO não tem ponto singular, isto é, todos pontos de  $\mathbb{R}$  são ordinários, inclusive  $x = 0$ . De fato, como

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

e

$$\frac{1}{x} (1 - \cos x) = \frac{1}{x} \left( \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots \right) = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!} + \dots$$

são as séries de Taylor relativa a  $x = 0$  das extensões contínuas de  $p(x)$  e  $q(x)$  nesse ponto, a analiticidade em  $x = 0$  está verificada.

$$\text{iv) } (x^2 + 1)y'' + xy' - y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{x}{x^2 + 1}y' - \frac{1}{x^2 + 1}y(x) = 0.$$

Os pontos singulares dessa EDO são as raízes de  $x^2 + 1 = 0$ , a saber,  $x = \pm i$ , nos quais  $x/(x^2 + 1)$  e  $1/(x^2 + 1)$  não admitem extensão contínua, pois apresentam limites infinitos nesses pontos. Esse exemplo ilustra que pontos singulares não são necessariamente reais.

Percebe-se que a caracterização de pontos ordinários e singulares com base no conceito de analiticidade pode complicar, às vezes, a determinação deles. Ora, o conceito de função analítica é pormenorizadamente estudado num curso de funções complexas, e é exatamente a falta desse estudo que nos traz dificuldades aqui. Mas não precisamos de muita teoria para prosseguir, uma vez que estaremos, na maioria das vezes, preocupados apenas com EDOs cujos coeficientes são polinômios. Nesse caso, fornecemos a seguinte receita:

A EDO (2.6) – no caso em que  $A(x)$ ,  $B(x)$  e  $C(x)$  são polinômios sem fator comum – tem, em  $x = x_0$  (real ou imaginário), um ponto

- *ordinário* se  $A(x_0) \neq 0$
- *singular* se  $A(x_0) = 0$

Por exemplo:

i)  $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y(x) = 0$  : os pontos singulares são as raízes de  $x^2 - 1 = 0$ , isto é,  $x = \pm 1$ . Todos os outros pontos são ordinários.

ii)  $(x-1)^2y'' + (x^2-1)y' + (x-1)^2y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)y'' + (x+1)y' + (x-1)y(x) = 0$  : ponto singular em  $x = 1$ .

iii)  $(x-1)y'' + (x^2-1)y' + (x-1)^2y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + (x+1)y' + (x-1)y(x) = 0$  : não tem ponto singular (todos pontos de  $\mathbb{R}$  são ordinários).

iv)  $x^2y'' + x^2y' + x(x-1)y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad xy'' + xy' + (x-1)y(x) = 0$  : ponto singular em  $x = 0$ .

v)  $(x^2 + 1)y'' + y(x) = 0$  : pontos singulares em  $x = \pm i$ .

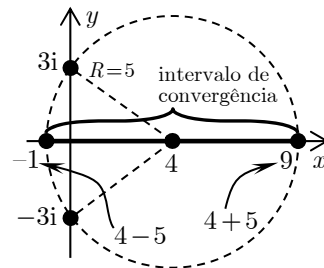
## 2.2 Teorema da Existência de Soluções em Série de Potências

Se  $x = x_0$  for um ponto ordinário da EDO (2.6), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma da série de potências  $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ , convergindo cada série, pelo

menos, no intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , em que  $R$  é a distância do ponto  $x_0$  ao ponto singular (real ou não) mais próximo.

Por exemplo, a solução da EDO  $(x-1)y'' + xy' + y = 0$  na forma  $\sum_n a_n(x-4)^n$ , isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário  $x = 4$ , é convergente para  $(4-3, 4+3) = (1, 7)$ , pois, nesse caso, a distância  $R$  do ponto  $x = 4$  ao ponto singular mais próximo, que é o ponto  $x = 1$ , é  $R = |4-1| = 3$ .

Outro exemplo: a solução da EDO  $(x^2+9)y'' + xy' + y = 0$  na forma  $\sum_n a_n(x-4)^n$ , isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário  $x = 4$ , é convergente para  $(4-5, 4+5) = (-1, 9)$ , pois, nesse caso, a distância  $R$  do ponto  $x = 4$  (do eixo das abscissas, que também é o ponto  $z_1 = 4$  do plano complexo) ao ponto singular mais próximo, que são os pontos  $z_2^\pm = \pm 3i$  do plano complexo, é  $R = |z_1 - z_2^\pm| = |4 - 3i| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5^{(*)}$ . A figura à direita mostra que o intervalo  $(-1, 9)$  é a parte do eixo real que jaz no interior da circunferência de raio  $R = 5$  centrada no ponto  $x = 4$  desse eixo.



## 2.3 Exemplos de Resolução de EDOs Lineares por Séries de Potências em Torno de Ponto Ordinário

*Nota:* Aqui, por questão de simplicidade, supomos que a origem  $x = 0$  seja sempre o ponto ordinário em torno do qual se deseja obter a solução da EDO na forma de uma série de potências,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  no caso. Isso não significa perda de generalidade, pois, mediante a mudança para a variável  $t = x - x_0$ , sempre podemos transformar uma EDO com ponto ordinário em  $x = x_0$  noutra com ponto ordinário em  $t = 0$ .

Exemplo 1:  $y'' - 2xy = 0$

Como não há pontos singulares, a solução em série obtida abaixo é convergente para todo  $x$  real.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3} x^{n-2} = \underbrace{2a_2}_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{[n(n-1)a_n - 2a_{n-3}]}_0 x^{n-2} \\ &\Rightarrow a_2 = 0 \quad \text{e} \quad a_n \Big|_{n \geq 3} = \frac{2a_{n-3}}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Como  $a_2 = 0$ , temos que  $a_5 = a_8 = \dots = a_{2+3k} \Big|_{k \geq 0} = 0$ .

O coeficiente  $a_0$  permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes  $a_{3k} \Big|_{k \geq 1}$ :

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2a_0}{(3)(2)} = \frac{a_0}{3} \\ a_6 &= \frac{2a_3}{(6)(5)} = \frac{1}{15} \frac{a_0}{3} = \frac{a_0}{45} \\ a_9 &= \frac{2a_6}{(9)(8)} = \frac{1}{36} \frac{a_0}{45} = \frac{a_0}{1620} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(\*) Recorde-se de que a distância entre dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  do plano complexo é dada por  $|z_1 - z_2|$ , e que o módulo de um número complexo  $z = a + bi$  é  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Por exemplo, a distância entre os pontos  $6 + 13i$  e  $1 + i$  é  $|6 + 13i - (1 + i)| = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ .

O coeficiente  $a_1$  também permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes  $a_{3k+1} \Big|_{k \geq 1}$ :

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{2a_1}{(4)(3)} = \frac{a_1}{6} \\ a_7 &= \frac{2a_4}{(7)(6)} = \frac{1}{21} \frac{a_1}{6} = \frac{a_1}{126} \\ a_{10} &= \frac{2a_7}{(10)(9)} = \frac{1}{45} \frac{a_1}{126} = \frac{a_1}{5670} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + \\ &\underbrace{a_2}_{0} x^2 + \underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{3}} x^3 + \underbrace{a_4}_{\frac{a_1}{6}} x^4 + \underbrace{a_5}_{0} x^5 + \underbrace{a_6}_{\frac{a_0}{45}} x^6 + \underbrace{a_7}_{\frac{a_1}{126}} x^7 + \underbrace{a_8}_{0} x^8 + \underbrace{a_9}_{\frac{a_0}{1620}} x^9 + \underbrace{a_{10}}_{\frac{a_1}{5670}} x^{10} + \dots \\ &= a_0 \left( 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + \frac{x^9}{1620} + \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + \frac{x^{10}}{5670} + \dots \right) \end{aligned}$$

é a solução desejada, sendo as séries entre parênteses duas soluções linearmente independentes da EDO.

Exemplo 2:  $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

Os pontos singulares são  $x = \pm i$ . A distância entre esses pontos e o ponto de expansão  $x = 0$  é  $R = |0 \pm i| = |i| = 1$ . Logo, a solução em série obtida abaixo é convergente para  $x \in (0 - R, 0 + R) = (-1, 1)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)a_{n-2} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\ &= \underbrace{2a_2 + 6a_3x + a_4x^2 - a_0 - a_1x}_{2a_2 - a_0 + 6a_3x} + \sum_{n=4}^{\infty} \left\{ n(n-1)a_n + \underbrace{[(n-2)(n-3) + n-2-1]}_{(n-1)(n-3)} a_{n-2} \right\} x^{n-2} \\ &\Rightarrow 2a_2 - a_0 = 0, \quad a_3 = 0 \quad \text{e} \quad a_n \Big|_{n \geq 4} = -\frac{(n-3)a_{n-2}}{n} \end{aligned}$$

O coeficiente  $a_0$  permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes  $a_{2k} \Big|_{k \geq 1}$ :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4} = -\frac{a_0/2}{4} = -\frac{a_0}{8} \\ a_6 &= -\frac{3a_4}{6} = -\frac{-a_0/8}{2} = \frac{a_0}{16} \\ &\vdots \end{aligned}$$

O coeficiente  $a_1$  também permanece arbitrário, e, como  $a_3 = 0$ , vemos, pela relação de recorrência, que  $a_5 = a_7 = a_9 = \dots = 0$ . Logo,

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{2}} x^2 + \underbrace{a_3}_{0} x^3 + \underbrace{a_4}_{-\frac{a_0}{8}} x^4 + \underbrace{a_5}_{0} x^5 + \underbrace{a_6}_{\frac{a_0}{16}} x^6 + \underbrace{a_7}_{0} x^7 + \dots$$

$$= a_1x + a_0\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + \dots\right).$$

Exemplo 3:  $y'' - (1+x)y = 0$

Não existem pontos singulares, convergindo, para todo  $x$  real, a série que se obtém a seguir.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} \\ &= 2a_2 - a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)a_n - a_{n-2} - a_{n-3}] x^{n-2}, \end{aligned}$$

donde  $a_2 = a_0/2$  e

$$a_n \Big|_{n \geq 3} = \frac{a_{n-3} + a_{n-2}}{n(n-1)}$$

é a relação de recorrência. Como  $a_0$  e  $a_1$  permanecem arbitrários, em termos deles escrevemos todos os demais coeficientes:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2} \\ a_3 &= \frac{a_0 + a_1}{6} \\ a_4 &= \frac{a_1 + a_2}{12} = \frac{1}{12} \left( a_1 + \frac{a_0}{2} \right) = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12} \\ a_5 &= \frac{a_2 + a_3}{20} = \frac{1}{20} \left( \frac{a_0}{2} + \frac{a_0 + a_1}{6} \right) = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + \underbrace{\frac{a_2}{2}}_{\frac{a_0}{6}} x^2 + \underbrace{\frac{a_3}{6}}_{\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6}} x^3 + \underbrace{\frac{a_4}{24}}_{\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}} x^4 + \underbrace{\frac{a_5}{30}}_{\frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}} x^5 + \dots \\ &= a_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} + \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \dots \right). \end{aligned}$$

## 2.4 Exercícios

Calcule a solução em série centrada no ponto ordinário  $x = 0$  de cada uma das EDOs abaixo:

(a)  $y'' = xy$       (b)  $y'' - 2xy' + y = 0$       (c)  $y'' + x^2y' + xy = 0$       (d)  $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

Respostas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(x) &= a_0 \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^9 + \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} x^{10} + \dots \right) \\ \text{(b)} \quad y(x) &= a_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \frac{21}{6!} x^6 - \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{5}{5!} x^5 + \frac{45}{7!} x^7 + \dots \right) \\ \text{(c)} \quad y(x) &= a_0 \left( 1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{4^2}{6!} x^6 - \frac{4^2 \cdot 7^2}{9!} x^9 + \dots \right) + a_1 \left( x - \frac{2^2}{4!} x^4 + \frac{2^2 \cdot 5^2}{7!} x^7 - \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot 8^2}{10!} x^{10} + \dots \right) \\ \text{(d)} \quad y(x) &= a_0 \left( 1 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{7}{4! \cdot 4} x^4 + \frac{7 \cdot 23}{6! \cdot 8} x^6 - \dots \right) + a_1 \left( x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{14}{5! \cdot 2} x^5 - \frac{14 \cdot 34}{7! \cdot 4} x^7 - \dots \right) \end{aligned}$$



# O Método dos Autovalores para Sistema de EDOs Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

### 3.1 Tópicos Preliminares

Um sistema de  $n$  EDOs lineares de 1ª ordem de coeficientes constantes e  $n$  funções incógnitas  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  tem a forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}, \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}}_{F(t)} \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}X &= AX(t) + F(t) \quad , \end{aligned} \tag{3.1b}$$

Seguem dois princípios, fáceis de provar, que são válidos para qualquer sistema de EDOs lineares [mais geral que aquele em (3.1)], podendo as EDOs terem ordem maior do que 1 e coeficientes dependentes de  $t$  (sendo também chamados de *sistema linear de EDOs*):

Se o vetores  $X_1, \dots, X_k$  são soluções de  $X'(t) = AX(t)$ , então a combinação linear  $c_1X_1 + \dots + c_kX_k$ , onde  $c_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) são constantes, também é solução; em particular, um múltiplo escalar de uma solução e a soma de duas soluções também são soluções.

Considere o vetor  $X_i$  que é solução de  $X'(t) = AX + F_i(t)$ , com  $(i = 1, \dots, k)$ ; ou seja, temos  $n$  soluções de sistemas lineares que se distinguem apenas pelos termos independentes. Nesse caso, a combinação linear  $c_1X_1 + \dots + c_kX_k$  de coeficientes constantes é solução de  $X'(t) = AX + [c_1F_1(t) + \dots + c_kF_k(t)]$ .

Em todo o restante deste capítulo, o sistema linear em 3.1, com matriz  $A$  constante, é o considerado.

### – Soluções Linearmente Independentes

Os conceitos de dependência linear e de independência linear estudados na Álgebra Linear é essencial neste estudo, sobre os quais há o seguinte teorema:

**Teorema.** Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  soluções do sistema linear homogêneo, e considere o chamado wronskiano dessas  $n$  soluções, denotado e definido como segue:

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \text{determinante da matriz } n \times n \text{ formada por } n \text{ colunas que são as soluções } X_1, X_2, \dots, X_n.$$

Tem-se que  $W(X_1, X_2, \dots, X_n) \neq 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2)$  se e somente se as soluções  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  forem linearmente independentes no intervalo  $(t_1, t_2)$ .

Demonstra-se que, no intervalo  $(t_1, t_2)$ , ou o wronskiano não se anula em nenhum ponto ou se anula em todos eles. Logo, ao se provar que o wronskiano  $W$  difere de zero em algum ponto de  $(t_1, t_2)$ , prova-se que  $W \neq 0$  em todos os pontos desse intervalo.

### – Solução Geral

Outro conceito importante é o de conjunto fundamental de soluções num intervalo  $(t_1, t_2)$ , que é definido como um conjunto formado por quaisquer  $n$  soluções linearmente independentes do sistema homogêneo naquele intervalo. Sobre esse conceito se baseia o seguinte teorema, básico nesta exposição:

**Teorema (sistema homogêneo)** Num intervalo  $(t_1, t_2)$ , existe conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo, e a solução geral desse sistema é dada pela combinação linear das soluções de um conjunto fundamental de soluções qualquer.

**Teorema (sistema não homogêneo)** Se  $X_P(t)$  é uma solução conhecida de um sistema não homogêneo, dita solução particular, e  $X_H(t)$  é a solução geral do sistema homogêneo associado, então  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$  é a solução geral desse sistema não homogêneo.

Em vista desse teorema, o processo de calcular a única solução de um sistema linear não homogêneo pode ser dividido em três etapas:

**Etapas da resolução de um sistema não homogêneo  $X'(t) = AX(t) + F(t)$ :**

Etapas 1: Resolve-se o sistema homogêneo associado  $X'_H(t) = AX_H(t)$ , obtendo-se  $X_H(t) = c_1 X_1(t) + \dots + X_n(t)$ , onde  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  formam um conjunto fundamental de soluções desse sistema homogêneo.

Etapas 2: Determina-se alguma solução  $X_P(t)$  tal que  $X'_P(t) = AX'_P(t) + F(t)$  (uma solução particular do sistema não homogêneo).

Etapas 3: Forma-se a solução geral  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$  do sistema não homogêneo.

### – Problema de Valor Inicial

Um Problema de Valor Inicial (PVI) com o sistema linear (3.1) consiste em resolver tal sistema sob as chamadas condições iniciais, que são assim especificadas num ponto  $t_0$  do intervalo  $(t_1, t_2)$  considerado:

$$X(t_0) = \text{col}[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)] = \text{col}[\underbrace{k_1, k_2, \dots, k_n}_{\text{números reais}}].$$

Prova-se que, no caso do sistema homogêneo, esse PVI tem sempre uma única solução. Mas, no caso não homogêneo, para garantir a existência de uma única solução, a continuidade das funções  $f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) naquele intervalo é uma condição suficiente.

### 3.1.2 Alguns Aspectos da Teoria dos Autovalores e Autovetores de um Operador Linear

Seja  $L$  uma transformação linear num espaço vetorial  $V$ :

$$\begin{aligned} L : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto Lv = w \end{aligned} \quad (3.2)$$

caso em que  $L$  recebe a denominação de operador linear. Um vetor *não nulo*  $v \in V$  é autovetor de  $L$  se existe um escalar  $\lambda$  tal que

$$Lv = \lambda v. \quad (3.3)$$

Dizemos que  $\lambda$  é o autovalor de  $L$  associado ao autovetor  $v$ , e nos referimos à equação acima como um problema de autovalor. Essa equação tem obviamente a solução  $v = 0$ , chamada de solução trivial, que, no entanto, como estipulado acima, não pode ser autovetor.

Se houver  $n$  (qualquer inteiro positivo) autovetores  $v_1, \dots, v_n$  linearmente independentes associados ao mesmo autovalor  $\lambda$ , então qualquer combinação linear desses autovetores também é um autovetor associado a  $\lambda$ ; de fato:

$$L(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1 \underbrace{Lv_1}_{\lambda v_1} + \dots + c_n \underbrace{Lv_n}_{\lambda v_n} = \lambda(c_1v_1 + \dots + c_nv_n).$$

Portanto, *sempre há uma infinidade de autovetores associados a um mesmo autovalor*  $\lambda$ , os quais, juntamente com o vetor nulo, formam um subespaço vetorial de  $V$ , denominado autoespaço de  $\lambda$ , aqui denotado por  $S_\lambda$ . Apesar dessa infinidade, é comum dizermos que "só existe um autovetor (ou só existem dois autovetores, etc.)", assim na verdade informando que, no autoespaço de  $\lambda$ , não existem mais de um autovetor (ou mais de dois autovetores, etc.) que sejam linearmente independentes. Em resumo, se a dimensão do subespaço  $S_\lambda$  for  $n$ , costumamos dizer que, ao autovalor  $\lambda$ , só existem  $n$  autovetores correspondentes (sendo estes uma base de  $S_\lambda$ ).

Se  $v = (v_1, \dots, v_n) \in V = \mathbb{R}^n$ , a multiplicidade algébrica  $m$  de um autovalor  $\lambda$  é o número de vezes que esse autovalor aparece como raiz do polinômio característico da matriz  $A$  associada a  $L$ , e a multiplicidade geométrica  $g$  de  $\lambda$  é a dimensão de  $S_\lambda$  (o maior número de elementos que um conjunto linearmente independente de autovetores associados a  $\lambda$  pode ter). Há a seguinte relação entre essas duas grandezas:

$$1 \leq g \leq m.$$

Demonstra-se que  $g$  é igual ao número de linhas nulas na matriz  $A - \lambda I$  ( $I$  é a matriz identidade) em sua forma escalonada.

A respeito do cálculo de autovalores e autovetores, o aluno deverá recordar-se de como efetuá-lo. A Ref. [10] pode ser consultada, sendo recomendada, no mínimo, a leitura das seções 6.1 e 6.2, ou uma revisão mais rápida seria a Ref. [14], seção 8.4.3.

A seguir fornecemos um conjunto de matrizes  $3 \times 3$  que contempla todas as possibilidades do par  $(m, g)$  previstas pelas desigualdades  $g \leq m \leq 3$ .

No *primeiro exemplo*, a matriz  $A$  tem três autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  distintos ( $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ), cujos autoespaços, portanto, segundo a relação acima, têm necessariamente dimensão 1 ( $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ ). Serão calculados os autovetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  associados àqueles três autovalores. Note que, quando dizemos "o autovetor  $v_1$  associado a  $\lambda_1$ ", está implícito que  $v_1$  pode ser qualquer autovetor de  $S_{\lambda_1}$ , sendo escolhido o que na situação se ache o mais conveniente (por exemplo, pode-se sempre escolher autovetores unitários).

No *segundo exemplo*,  $A$  tem dois autovalores distintos:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , para os quais  $(m_1, g_1) = (2, 1)$  e  $(m_2, g_2) = (1, 1)$ . São calculados um autovetor  $v_1 \in S_{\lambda_1}$  e um autovetor  $v_2 \in S_{\lambda_1}$ .

No *terceiro exemplo*,  $A$  tem dois autovalores distintos:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , para os quais  $(m_1, g_1) = (2, 2)$  e  $(m_2, g_2) = (1, 1)$ . São calculados dois autovetores  $v_1, v_2 \in S_{\lambda_1}$  e um autovetor  $v_2 \in S_{\lambda_1}$ .

No *quarto exemplo*,  $A$  tem um autovalor distinto:  $\lambda_1$ , para o qual  $(m_1, g_1) = (3, 1)$ . É calculado apenas um autovetor  $v_1 \in S_{\lambda_1}$ .

No *quinto exemplo*,  $A$  tem um autovalor distinto:  $\lambda_1$ , para o qual  $(m_1, g_1) = (3, 2)$ . São calculados dois autovetores  $v_{11}, v_{12} \in S_{\lambda_1}$ .

No *sexto exemplo*,  $A$  tem um autovalor distinto:  $\lambda_1$ , para o qual  $(m_1, g_1) = (3, 3)$ . São calculados três autovetores  $v_{11}, v_{12}, v_{13} \in S_{\lambda_1}$ .

Eis os exemplos:

$$\begin{aligned}
\text{Exemplo 1: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 [(m_1, g_1) = (1, 1)] &\longrightarrow v_1 = (1, 0, 0) \\ \lambda_2 = 3 [(m_2, g_2) = (1, 1)] &\longrightarrow v_2 = (1, 1, 0) \\ \lambda_3 = 5 [(m_3, g_3) = (1, 1)] &\longrightarrow v_3 = (1, 2, 1) \end{cases} \\
\text{Exemplo 2: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 [(m_1, g_1) = (2, 1)] &\longrightarrow v_1 = (1, 0, 0) \\ \lambda_2 = 2 [(m_2, g_2) = (1, 1)] &\longrightarrow v_2 = (1, 1, 1) \end{cases} \\
\text{Exemplo 3: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 [(m_1, g_1) = (2, 2)] &\longrightarrow \begin{cases} v_{11} = (1, 0, 0) \\ v_{12} = (0, 1, 0) \end{cases} \\ \lambda_2 = 2 [(m_2, g_2) = (1, 1)] &\longrightarrow v_2 = (0, 0, 1) \end{cases} \\
\text{Exemplo 4: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \lambda_1 = 1 [(m_1, g_1) = (3, 1)] \longrightarrow v_1 = (1, 0, 0) \\
\text{Exemplo 5: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \lambda_1 = 1 [(m_1, g_1) = (3, 2)] \longrightarrow \begin{cases} v_{11} = (1, 0, 0) \\ v_{12} = (0, 1, 0) \end{cases} \\
\text{Exemplo 6: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \lambda_1 = 1 [(m_1, g_1) = (3, 3)] \longrightarrow \begin{cases} v_{11} = (1, 0, 0) \\ v_{12} = (0, 1, 0) \\ v_{13} = (0, 0, 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Observando a estrutura das respostas apresentadas acima, podemos dizer que resolver o problema de autovalor  $Lv = \lambda v$  consiste em calcular os autovalores  $\lambda_i$  e os respectivos autovetores  $v_{ij}$  ( $j = 1, g_i$ ), ou, em outros termos, calcular cada  $\lambda_i$  e uma base do respectivo autoespaço  $S_{\lambda_i}$ .

Nota: Um problema baseado num operador linear que seja *homogêneo* (i.e, que, como se apresenta, admite a solução nula) pode ser caracterizado como um problema de autovalor caso exiba um parâmetro livre para o qual se buscam os valores (ditos autovalores) que lhe possibilitam a existência de soluções não nulas (ditos autovetores).

## 3.2 Sistemas Homogêneos

Trataremos, primeiramente, de sistemas de EDOs lineares de 1ª ordem *homogêneos*:  $F(t) \equiv 0$  em (3.1). Note que, quando  $n = 1$  ( $A$  é uma matriz  $1 \times 1$ , isto é, um número), a solução de  $dX/dt = AX$  é  $X(t) = Ce^{At}$ . Pois bem, prova-se que essa também é a solução quando  $n \geq 2$ , desde que se defina a exponencial de uma matriz. Não apresentaremos esse método; ele é descrito nos capítulos 29 e 31 da referência [4].

O método estudado aqui começa por admitir-se uma solução da forma  $X = Ve^{\lambda t}$ , onde  $V = \text{col}[v_1, \dots, v_n]$  é um vetor (coluna) constante; substituindo, obtemos

$$\lambda V e^{\lambda t} = AV e^{\lambda t} \Rightarrow AV = \lambda V, \text{ ou } (A - \lambda I)V = 0,$$

que é um problema de autovalor, no qual procuramos as soluções não nulas ( $V \neq 0$ ) associadas aos valores de  $\lambda$  que satisfazem a equação de autovalor, ou equação característica,  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Dividiremos nosso estudo em três casos: 1) autovalores reais e distintos, 2) autovalores imaginários e 3) autovalores repetidos. Isso não significa que um sistema de EDOs lineares se enquadre num desses três casos. Na verdade, os três casos podem ocorrer num mesmo problema, ocorrendo tanto autovalores reais quanto imaginários que se repetem.

### 3.2.1 1º Caso: Autovalores Reais e Distintos

A solução do sistema  $X' = AX$ , sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$ , é dada por

$$X(t) = \sum_{k=1}^n c_k V_k e^{\lambda_k t},$$

onde  $V_k$  é um vetor linearmente independente associado ao autovalor  $\lambda_k$ .

Exemplo 1:  $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$  ou  $\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Cálculo do autovetor  $V_1$  e da solução  $X_1(t)$  associados ao autovalor  $\lambda_1 = -1$ :

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \therefore (A - \lambda_1 I)V_1 &= 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=1} V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore X_1(t) &= V_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

Cálculo do autovetor  $V_2$  e da solução  $X_2(t)$  associados ao autovalor  $\lambda_2 = 4$ :

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \therefore A - \lambda_2 I = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3\beta/2 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=2} V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \therefore X_2(t) &= V_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} \end{aligned}$$

Solução geral:  $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$ , ou

$$x(t) = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \quad \text{e} \quad y(t) = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \quad \blacksquare$$

Exemplo 2:  $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$  ou  $\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 4)[(\lambda - 5)(\lambda + 3) + 1] + (\lambda + 3 + 1) \\ &= (\lambda + 4)[1 - (\lambda - 5)(\lambda + 3) - 1] = -(\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Cálculo do autovetor  $V_1$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = -3$ :

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 0\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos autovetores  $V_2$  e  $V_3$  associados aos autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente (abaixo, na passagem denotada por  $\xrightarrow{E}$ , a matriz é escalonada):

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 10\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 8\gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ Solução geral: } X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} \quad \blacksquare$$

### 3.2.2 2º Caso: Autovalores Imaginários

Os elementos da matriz  $A$  e, por conseguinte, os coeficientes da equação característica são reais. Logo, se  $\lambda$  imaginário for autovalor,  $\lambda^*$  (complexo conjugado) também será. Além disso, se ao autovalor  $\lambda$  corresponde o autovetor  $V$ , isto é  $AV = \lambda V$ , então  $(AV)^* = (\lambda V)^*$ , ou  $AV^* = \lambda^* V^*$ , significando que ao autovalor  $\lambda^*$  corresponde o autovetor  $V^*$ . Isso facilita os cálculos que seguem.

Exemplo 3:  $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 5x + 4y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \pm 2i$$

Cálculo do autovetor  $V$  associado ao autovalor  $\lambda = 5 + 2i$ :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{1-2i} \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=1-2i} V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$$

$$\therefore X(t) = k_1 V e^{\lambda t} + k_2 V^* e^{\lambda^* t} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Para escrever  $X(t)$  como uma função real, usamos a seguinte fórmula:

$$\boxed{k_1 V e^{\lambda t} + k_2 V^* e^{\lambda^* t} \Big|_{\substack{V \equiv P+Qi \\ \lambda \equiv a+bi}} = c_1 e^{at} (P \cos bt - Q \sin bt) + c_2 e^{at} (Q \cos bt + P \sin bt)} \quad , \quad (3.4)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes complexas arbitrárias,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes reais arbitrárias,  $a$  e  $b$  são as partes real e imaginária de  $\lambda$ , e  $P$  e  $Q$  são as partes real e imaginária de  $V$ .

No caso:  $\lambda = \underbrace{5}_a + \underbrace{2}_b i \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_Q i.$

$$\therefore X(t) = c_1 e^{5t} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sin 2t \right) + c_2 e^{5t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t \right) \quad \blacksquare$$

A dedução da fórmula em (3.4) é como segue:

$$\begin{aligned}
X(t) &= k_1 V e^{\lambda t} + k_2 V^* e^{\lambda^* t} = k_1 (P + Qi) e^{(a+bi)t} + k_2 (P - Qi) e^{(a-bi)t} \\
&= k_1 (P + Qi) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) + k_2 (P - Qi) e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \\
&= [k_1 (P + Qi) + k_2 (P - Qi)] e^{at} \cos bt + i [k_1 (P + Qi) - k_2 (P - Qi)] e^{at} \sin bt \\
&= [\underbrace{(k_1 + k_2) P}_{\equiv c_1} + \underbrace{i(k_1 - k_2) Q}_{\equiv c_2}] e^{at} \cos bt + [\underbrace{i(k_1 - k_2) P}_{c_2} - \underbrace{(k_1 + k_2) Q}_{c_1}] e^{at} \sin bt \\
&= c_1 e^{at} (P \cos bt - Q \sin bt) + c_2 e^{at} (Q \cos bt + P \sin bt) \quad \text{CQD.}
\end{aligned}$$

Exemplo 4:  $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A X$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1/2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 + 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A - \lambda_1 I &= \begin{bmatrix} -i & 2 & 0 \\ -1/2 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -i\alpha + 2\beta = 0 \\ 0\beta = 0 \\ -i\gamma = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2i\beta \\ \beta \text{ qq} \\ \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{\beta=i} V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_Q i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A - \lambda_3 I &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha/2 = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 0\gamma = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore X(t) &= k_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_1} e^{(1+i)t} + k_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_2} e^{(1-i)t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \\
&= \overbrace{c_1 e^t \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + c_2 e^t \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right)} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \blacksquare
\end{aligned}$$

onde usamos (3.4) para reescrever como uma função real os dois primeiros termos (indicados por chaves), que correspondem ao par de autovalores complexos conjugados.

### 3.2.3 3º Caso: Autovalores Repetidos

A solução do sistema  $X' = AX$ , sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$  constante, é dada por

$$X = \sum_{k=1}^{k_{\max}} X_k \quad (k_{\max} = n^{\circ} \text{ de autovalores distintos}) ,$$

onde  $X_k$  é a parcela da solução associada ao  $k$ -ésimo autovalor distinto  $\lambda_k$ . A expressão de  $X_k$  depende da multiplicidade de  $\lambda_k$  e dos autovetores associados a esse autovalor; vejamos:

- Se a multiplicidade de  $\lambda_k$  for igual a 1 , então, sendo  $V_k$  o autovetor associado, temos que:

$$X_k = c_k V_k e^{\lambda_k t} . \quad (3.5)$$

- Se a multiplicidade de  $\lambda_k$  for igual a  $m \geq 2$  , a expressão de  $X_k$  depende do número de autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor, havendo três possibilidades:

- Existem  $m$  autovetores  $V_{k1}, V_{k2}, \dots, V_{km}$  :

$$X_k = (c_{k1}V_{k1} + \dots + c_{km}V_{km}) e^{\lambda_k t} . \quad (3.6)$$

- Existe um único autovetor  $U_1$  :

$$X_k = \left\{ c_{k1}U_1 + c_{k2}(U_1 t + U_2) + c_{k3}\left(U_1 \frac{t^2}{2!} + U_2 t + U_3\right) + \dots \right. \\ \left. + c_{km}\left[U_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + U_2 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + U_{m-1}t + U_m\right] \right\} e^{\lambda_k t} , \quad (3.7)$$

onde  $(A - \lambda_k I) U_j = U_{j-1} \quad (j = 2, \dots, m)$  .

- O número de autovetores associados ao autovalor de multiplicidade  $m$  é maior que 1 e menor que  $m$ ; neste caso, o problema torna-se complicado e não será estudado aqui.

Essas fórmulas são provadas no final desta seção. Vale a pena escrevê-las em correspondência com a estrutura de autovalores e autovetores. Fazemos isso a seguir, onde cada seta que se inicia num autovalor  $\lambda_k$  indica uma base (de autovetores) do autoespaço de  $\lambda_k$  :

#### Matriz $A_{2 \times 2}$ :

Dois autovalores distintos:

$$\lambda_1 \rightarrow V_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \rightarrow V_2 \quad \rightsquigarrow \quad X = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$$

Um autovalor distinto:

$$\begin{array}{l} \lambda_1(\text{mult. } 2) \nearrow V_{11} \text{ e } V_{12} \rightsquigarrow X = [c_{11}V_{11} + c_{12}V_{12}] e^{\lambda_1 t} \quad (\text{v. Exemplo 5}) \\ \searrow U_1 \rightsquigarrow \begin{array}{l} X = [c_{11}U_1 + c_{12}(U_1 t + U_2)] e^{\lambda_1 t} \\ \text{onde } (A - \lambda_1 I)U_2 = U_1 \end{array} \quad (\text{v. Exemplo 6}) \end{array}$$

#### Matriz $A_{3 \times 3}$ :

Três autovalores distintos:

$$\lambda_1 \rightarrow V_1, \quad \lambda_2 \rightarrow V_2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 \rightarrow V_3 \quad \rightsquigarrow \quad X = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 V_3 e^{\lambda_3 t}$$

Dois autovalores distintos:

$$\begin{array}{l} \lambda_1(\text{mult. } 1) \rightarrow V_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2(\text{mult. } 2) \nearrow V_{21} \text{ e } V_{22} \rightsquigarrow X = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + [c_{21}V_{21} + c_{22}V_{22}] e^{\lambda_2 t} \quad (\text{v. Ex. 7}) \\ \searrow U_1 \rightsquigarrow \begin{array}{l} X = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + [c_{21}U_1 + c_{22}(U_1 t + U_2)] e^{\lambda_2 t} \\ \text{onde } (A - \lambda_2 I)U_2 = U_1 \end{array} \quad (\text{v. Ex. 8}) \end{array}$$

Um autovalor distinto:

$$\begin{array}{l} \lambda_1(\text{mult. } 3) \rightarrow V_{11}, V_{12} \text{ e } V_{13} \rightsquigarrow X = (c_{11}V_{11} + c_{12}V_{12} + c_{13}V_{13}) e^{\lambda_1 t} \\ \nearrow \text{não estudado aqui} \\ \searrow U_1 \rightsquigarrow \begin{array}{l} X = [c_{11}U_1 + c_{12}(U_1 t + U_2) + c_{13}(U_1 t^2/2 + U_2 t + U_3)] e^{\lambda_1 t} \\ \text{onde } (A - \lambda_1 I)U_2 = U_1 \quad \text{e} \quad (A - \lambda_1 I)U_3 = U_2 \end{array} \quad (\text{v. Ex. 9}) \end{array}$$



Enfatize-se, na notação adotada, que, se o autovalor  $\lambda_k$  é múltiplo e existe um único autovetor associado, este é denotado por  $U_1$  (ao invés de  $V_k$ ). Vejamos algumas aplicações dessas fórmulas:

Exemplo 5:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ (mult. 2)}.$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ qq} \\ \beta \text{ qq} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_{11}} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{V_{12}} \Rightarrow X_1(t) = (c_{11}V_{11} + c_{12}V_{12})e^{\lambda_1 t}.$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = X(t) = X_1(t) = \left( \underbrace{c_{11}}_{k_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{c_{12}}_{k_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t} = \begin{bmatrix} k_1 e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Nota: O sistema linear consiste em duas EDOs que não são acopladas, permitindo que sejam resolvidas separadamente:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x \Rightarrow x(t) = k_1 e^{3t} \\ y'(t) = 3y \Rightarrow y(t) = k_2 e^{3t} \end{cases}.$$

Embora demasiadamente simples para ser resolvido matricialmente, este exemplo serve como verificação do método.

Exemplo 6:  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1) + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ (mult. 2)}.$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=1} U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X_1 = \{c_{21}U_1 + c_{22}(U_1 t + U_2)\}e^{\lambda_2 t},$$

onde  $U_2$  é uma solução (há uma infinidade) do sistema algébrico  $(A - \lambda_1 I)U_2 = U_1$ , o qual, em componentes, se torna

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema é mais facilmente resolvido na forma de uma matriz aumentada a ser escalonada:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + \beta \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=0} U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = X_1 = \left\{ c_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_{12} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} e^{2t} \blacksquare$$

Exemplo 7:  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \text{ (mult. 1)} \\ \lambda_2 = -1 \text{ (mult. 2)} \end{cases}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \Rightarrow V_1 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_1 = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$  é a parcela da solução associada ao autovalor  $\lambda_1 = 5$ , conforme (3.5).

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 0\beta = 0 \\ 0\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - \gamma \\ \beta \text{ qq} \\ \gamma \text{ qq} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_{21}} + \underbrace{\gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{V_{22}} \Rightarrow X_2 = (c_{21} V_{21} + c_{22} V_{22}) e^{\lambda_2 t} = \left( c_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-t}$$

é a parcela da solução associada ao autovalor  $\lambda_2 = -1$ , conforme (3.6). A solução geral é  $X = X_1 + X_2$ , ou,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + \left( c_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-t} \blacksquare$$

Exemplo 8:  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)[\lambda(\lambda - 5)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & (\text{mult. } 1) \\ \lambda_2 = 5 & (\text{mult. } 2) \end{cases}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = -5\gamma/2 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = -2} V_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_1 = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$  é a parcela da solução associada ao autovalor  $\lambda_1 = 0$ , conforme (3.5).

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = -1} U_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_2 = \{c_{21} U_1 + c_{22}(U_1 t + U_2)\} e^{\lambda_2 t}$  é a parcela da solução associada ao autovalor  $\lambda_2 = 5$ , e  $U_2$  é uma solução do sistema algébrico  $(A - \lambda_2 I)U_2 = U_1$ , ou, em componentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema é mais facilmente resolvido a partir da sua forma que é dada por uma matriz aumentada e escalonada:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5/2 - 2\gamma \\ \beta = -1/2 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = 0} U_2 = \begin{bmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução geral é  $X = X_1 + X_2$ , ou,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \left\{ c_{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{22} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} e^{5t} \blacksquare$$

Exemplo 9:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ (mult. 3)}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = -1} U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_1 = \{c_{11}U_1 + c_{12}(U_1t + U_2) + c_{13}(U_1t^2/2 + U_2t + U_3)\}e^{\lambda_1 t}$  é a parcela da solução associada ao autovalor  $\lambda_1 = 1$ , sendo  $U_2$  e  $U_3$ , respectivamente, soluções dos sistemas algébricos resolvidos a seguir:

$$(A - \lambda_1 I)U_2 = U_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma + 1 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = 0} U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)U_3 = U_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = \gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = 0} U_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução geral é

$$X = X_1 = \left\{ c_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_{12} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_{13} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} e^t \blacksquare$$

Prova das fórmulas (3.5), (3.6) e (3.7):

Devemos provar que  $X_k$  dado por cada uma dessas fórmulas é solução do sistema linear, isto é, que  $AX_k - \lambda_k X_k = 0$ .

- Prova da fórmula em (3.5). Se  $X_k = c_k V_k e^{\lambda_k t}$ , onde  $AV_k = \lambda_k V_k$ , então

$$AX_k - X'_k = A(c_k V_k e^{\lambda_k t}) - (\lambda_k c_k V_k e^{\lambda_k t}) = \underbrace{(AV_k - \lambda_k V_k)}_0 c_k e^{\lambda_k t} = 0 \forall t. \text{ CQD.}$$

- Prova da fórmula em (3.6). Se  $X_k = \left( \sum_{l=1}^m c_{kl} V_{kl} \right) e^{\lambda_k t}$ , onde  $AV_{kl} = \lambda_k V_{kl}$ , então

$$AX_k - X'_k = \left( \sum_{l=1}^m c_{kl} AV_{kl} \right) e^{\lambda_k t} - \lambda_k \left( \sum_{l=1}^m c_{kl} V_{kl} \right) e^{\lambda_k t} = \left[ \sum_{l=1}^m c_{kl} \underbrace{(AV_{kl} - \lambda_k V_{kl})}_0 \right] e^{\lambda_k t} = 0 \forall t. \text{ CQD.}$$

- Prova da fórmula em (3.7). Esta fórmula pode ser escrita na forma

$$X_k = \sum_{l=1}^m c_{kl} X_{kl}, \quad \text{com } X_{kl} = e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^l U_j \frac{t^{l-j}}{(l-j)!}.$$

Demostramos que essa expressão de  $X_k$  é solução do sistema de EDOs observando, primeiramente, que

$$AX_k - X'_k = \sum_{j=1}^l c_{kl} \underbrace{(AX_{kl} - X'_{kl})}_0 = 0,$$

restando, para completar a demonstração, mostrar que o termo entre parênteses se anula:

$$\begin{aligned}
 AX_{kl} - X'_{kl} &= e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^l \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} AU_j - \lambda_k e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^l \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} U_j - e^{\lambda_k t} \underbrace{\sum_{j=1}^{l-1} \frac{t^{l-j-1}}{(l-j-1)!} U_j}_{\sum_{j=2}^l \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} U_{j-1}} \\
 &= e^{\lambda_k t} \left\{ \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \underbrace{[AU_1 - \lambda_k U_1]}_0 + \sum_{j=2}^l \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} \underbrace{[(A - \lambda_k I)U_j - U_{j-1}]}_0 \right\} = 0 \quad \text{CQD.}
 \end{aligned}$$

### 3.3 Sistemas Não Homogêneos

De acordo com a descrição das etapas de resolução do sistema não homogêneo  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  apresentada no texto quadriculado na pág. 41, uma vez encontrada a solução geral  $X_H(t)$  do sistema homogêneo associado, basta somar a essa solução uma solução particular  $X_P(t)$  do sistema para obter a solução geral  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$  do sistema não homogêneo. Nesta seção descrevemos dois métodos para determinar  $X_P(t)$ , expostos separadamente nas duas subseções seguintes.

#### 3.3.1 Método dos Coeficientes a Determinar

Este método funciona para algumas expressões particulares de  $F(t)$ , das quais consideramos aqui apenas quatro. Abaixo listamos a regra de formação da solução particular  $X_P(t)$  para esses quatro casos. Nas expressões consideradas para  $F(t)$ , um termo conhecido,  $K$  e  $M$  são matrizes colunas conhecidas, e  $k$  é uma constante conhecida. Já nas formas admitidas para  $X_P$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes coluna a serem determinadas. Todas essas matrizes são da mesma ordem  $n \times 1$  de  $F(t)$  e  $X_P(t)$ , sendo  $n$  o número de EDOs no sistema. O método consiste em calcular  $B$  e  $C$ , cujos elementos  $B_i$  e  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) são os "coeficientes a determinar" (\*), presentes nas equações do sistema  $X'_P(t) = AX_P(t) + F(t)$ .

$$F(t) = K \text{ (const.)} \quad \Rightarrow \quad X_P(t) = B \text{ (const.)} \quad (3.8)$$

$$F(t) = Kt + M \text{ (com } M \text{ nulo ou não)} \quad \Rightarrow \quad X_P(t) = Bt + C \quad (3.9)$$

$$F(t) = Ke^{kt} \text{ (} k \neq \text{autovalor de } A\text{)} \quad \Rightarrow \quad X_P(t) = Be^{kt} \quad (3.10)$$

$$F(t) = Ke^{kt} \text{ (} k = \text{autovalor de } A \text{ de multíp. 1)} \quad \Rightarrow \quad X_P(t) = Bte^{kt} + Ce^{kt} \quad (3.11)$$

Pelo princípio de superposição para sistema linear não homogêneo (v. pág 40), essas regras de formação de  $X_P(t)$  se superpõem; por exemplo, se  $F(t)$  é a soma de expressões como aquelas em (3.9) e (3.10), isto é,  $F(t) = Kt + M + Ne^{kt}$ , então havemos de usar  $X_P(t) = Bt + C + De^{kt}$ .

Exemplo: Vamos resolver  $X'(t) = AX(t) + F(t)$ , com  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e  $F(t)$  dado por:

$$(a) \quad F(t) = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}; \quad (b) \quad F(t) = \begin{bmatrix} -2t \\ -2t + 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \quad F(t) = \begin{bmatrix} -3e^{2t} \\ -5e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Resolução:

A solução geral é dada por

$$X(t) = X_H(t) + X_P(t) \quad \blacksquare$$

O sistema homogêneo associado já foi resolvido na subseção 3.2.1, Exemplo 1, quando se obteve

$$X_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} \quad \blacksquare$$

(\*)O presente método lembra aquele, de mesmo nome, existente para determinar uma solução particular de uma EDO linear de coeficientes constantes cujo termo independente envolve polinômios, funções exponenciais, senos, cossenos, somas ou produtos finitos dessas funções, ou ainda somas finitas de tais produtos. No caso de EDOs, não é complicado elaborar o método genericamente, o que não acontece no caso de sistemas de EDOs, razão pela qual aqui consideramos apenas algumas formas do termo independente  $F(t)$

Calculemos  $X_P(t)$  de cada um dos itens (a), (b) e (c):

Item (a):

Como  $F$  é constante, de acordo com (3.8) admitimos  $X_P = B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$  (constante) e substituímos essa expressão no sistema linear para calcular  $B_1$  e  $B_2$ :

$$\begin{aligned} X'_P = AX_P + F &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2B_1 + 3B_2 + 9 \\ 0 = 2B_1 + B_2 - 5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} B_1 = 6 \\ B_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow X_P = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \blacksquare \end{aligned}$$

Item (b):

Como  $F$  é formado por polinômios do 1º grau, de acordo com (3.9) admitimos

$$X_P = Bt + C = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 t + C_1 \\ B_2 t + C_2 \end{bmatrix}$$

e substituímos essa expressão no sistema linear para calcular  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  e  $C_2$ :

$$AX_P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 t + C_1 \\ B_2 t + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(B_1 t + C_1) + 3(B_2 t + C_2) \\ 2(B_1 t + C_1) + (B_2 t + C_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2B_1 + 3B_2)t + (2C_1 + 3C_2) \\ (2B_1 + B_2)t + (2C_1 + C_2) \end{bmatrix}.$$

$$F - X'_P = \begin{bmatrix} -2t \\ -2t + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - B_1 \\ -2t + 1 - B_2 \end{bmatrix}.$$

$$AX_P + F - X'_P = \begin{bmatrix} (2B_1 + 3B_2)t + (2C_1 + 3C_2) \\ (2B_1 + B_2)t + (2C_1 + C_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t - B_1 \\ -2t + 1 - B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} (2B_1 + 3B_2 - 2)t + (2C_1 + 3C_2 - B_1) = 0 \\ (2B_1 + B_2 - 2)t + (2C_1 + C_2 + 1 - B_2) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2B_1 + 3B_2 = 2 \\ 2B_1 + B_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = B_1 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = -1 + B_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\therefore X_P(t) = \begin{bmatrix} B_1 t + C_1 \\ B_2 t + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 1 \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Item (c):

Como  $F$  é como em (3.10) (pois  $k = 2$  não é autovalor da matriz  $A$ ), admitimos

$$X_P = Be^{2t} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} B_1 e^{2t} \\ B_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

e substituímos essa expressão no sistema linear para calcular  $B_1$  e  $B_2$ :

$$AX_P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 e^{2t} \\ B_2 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2B_1 + 3B_2)e^{2t} \\ (2B_1 + B_2)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$F - X'_P = \begin{bmatrix} -3e^{2t} \\ -5e^{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2B_1 e^{2t} \\ 2B_2 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3 - 2B_1)e^{2t} \\ (-5 - 2B_2)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$AX_P + F - X'_P = \begin{bmatrix} (2B_1 + 3B_2)e^{2t} \\ (2B_1 + B_2)e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-3 - 2B_1)e^{2t} \\ (-5 - 2B_2)e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3B_2 - 3)e^{2t} \\ (2B_1 - B_2 - 5)e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} 3B_2 - 3 = 0 \\ 2B_1 - B_2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 3 \\ B_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\therefore X_P(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \blacksquare$$

### 3.3.2 Método da Variação dos Parâmetros

A solução geral do sistema homogêneo associado

$$X_H' - AX_H(t) = 0$$

é da forma

$$X_H(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_C = \Phi(t)C,$$

onde  $\Phi(t)$  (a denominada matriz fundamental) é formada por  $n$  colunas que são soluções  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $X_n(t)$  linearmente independentes do sistema homogêneo<sup>(\*)</sup>, e  $C$  é uma matriz coluna com  $n$  constante arbitrárias. Substituindo a segunda equação acima na primeira, obtemos  $[\Phi'(t) - A\Phi(t)]C = 0$ , a qual, por ser válida com  $C$  arbitrário, leva a concluirmos que  $\Phi'(t) - A\Phi(t) = 0$ , equação que é utilizada abaixo, no cancelamento dos dois termos riscados, ao se deduzir uma solução particular  $X_P(t)$  do sistema não homogêneo.

Admitindo que  $X_P(t) = \Phi(t)U(t)$ , obtemos, substituindo essa expressão no sistema não homogêneo, a seguinte equação que permite a determinação de  $U(t)$  [e, portanto, de  $X_P(t)$ ]:

$$0 = X_P'(t) - AX_P(t) - F(t) = \cancel{\Phi'(t)U(t)} + \Phi(t)U'(t) - \cancel{A\Phi(t)U(t)} - F(t) \Rightarrow U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t).$$

Em resumo, temos que a solução geral do sistema não homogêneo é  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$ , isto é, a soma da solução geral do sistema homogêneo  $X_H(t) = \Phi(t)C$  (calculada conforme a seção 3.2) com a solução particular  $X_P(t) = \Phi(t)U(t)$ , onde  $\underline{U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t)}$ .

A substituição do parâmetro  $C$  em  $X_H(t)$  pelo  $U(t)$  para obter  $X_P(t)$  justifica o nome deste método.

Exemplo 1: Resolução do sistema  $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}_A X + \underbrace{\begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}}_{F(t)} \quad (t > 0) :$

A resolução do sistema homogêneo associado  $X_H' = AX_H(t)$  fornece a solução geral

$$X_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Após o cálculo<sup>(†)</sup> de  $\Phi^{-1}(t)$ , temos que

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}}_{\Phi^{-1}(t)} \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \int \left[ 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^t \right] dt + k_1 \\ \int \left[ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \right] dt + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix},$$

(\*)Note que  $\Phi(t)$  é a matriz cujo determinante é o wronskiano daquelas soluções linearmente independentes:  $W(X_1, \dots, X_n) = \det \Phi(t) \neq 0$ , mostrando que  $\Phi(t)$  tem uma inversa  $\Phi^{-1}(t)$ .

(†)Uma fórmula útil: Se  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , com  $\det A = ad - bc \neq 0$ , então  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .

onde fizemos  $k_1 = k_2 = 0$ , pois queremos uma solução particular. Logo,

$$X_P(t) = \Phi(t)U(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6t}{5} - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3t}{5} - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix},$$

e a solução geral é, finalmente,

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6t}{5} - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3t}{5} - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Exemplo 2: Considere o sistema  $X' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -12e^{5t} \\ 0 \end{bmatrix}$  ( $t > 0$ ). Temos que

$$X_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & 2e^{4t} \\ 2e^t & e^{4t} \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo associado (verifique isso). Logo, a solução é  $X = X_H + X_P$ , sendo  $X_P$  calculado como segue:

$$U' = \Phi^{-1}F = \underbrace{\frac{1}{e^{5t} - 4e^{5t}} \begin{bmatrix} e^{4t} & -2e^{4t} \\ -2e^t & e^t \end{bmatrix}}_{\Phi^{-1}(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} -12e^{5t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{F(t)} = -\frac{1}{3e^{5t}} \begin{bmatrix} -12e^{9t} \\ 24e^{6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{4t} \\ -8e^t \end{bmatrix}.$$

$$X_P = \Phi U = \begin{bmatrix} e^t & 2e^{4t} \\ 2e^t & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} \\ -8e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} - 16e^{5t} \\ 2e^{5t} - 8e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15e^{5t} \\ -6e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3: Resolução completa do sistema  $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}}_A X(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} t^{-2} \\ -t^{-4} \end{bmatrix}}_{F(t)}$  ( $t > 0$ ):

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 9 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 3) + 9 = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ (multip. 2)}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)V = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta/3 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=3} \underbrace{V}_{\equiv U_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = c_{11}U_1e^{0t} + c_{12}(U_1t + U_2)e^{0t}$$

$$(A - \lambda_1 I)U_2 = U_1 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}}_{A - \lambda_1 I} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{V_1} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=0} U_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{X_1(t) = X_H(t) = c_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_{12} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t + 1/3 \\ 3 & 3t \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 3t & -t - 1/3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3t - (3t + 1)} = \begin{bmatrix} -3t & t + 1/3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U(t) &= \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt = \int \begin{bmatrix} -3t & t + 1/3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{-2} \\ -t^{-4} \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} -3t^{-1} - t^{-3} - \frac{1}{3}t^{-4} \\ 3t^{-2} + t^{-4} \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} -3 \ln t + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{9}t^{-3} \\ -3t^{-1} - \frac{1}{3}t^{-3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_P(t) &= \Phi(t)U(t) = \begin{bmatrix} 1 & t + 1/3 \\ 3 & 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \ln t + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{9}t^{-3} \\ -3t^{-1} - \frac{1}{3}t^{-3} \end{bmatrix} \\
&= X_P(t) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \ln t + \frac{1}{6}t^{-2} - t^{-1} - 3 \\ -9 \ln t + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-2} - 9 \end{bmatrix}}}
\end{aligned}$$

A solução geral é  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$ , ou seja,

$$X(t) = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{12}(t + \frac{1}{3}) - 3 \ln t + \frac{1}{6}t^{-2} - t^{-1} - 3 \\ 3c_{11} + 3c_{12}t - 9 \ln t + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-2} - 9 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

### 3.4 Aplicações

#### 3.4.1 Conversão de EDO Linear de Ordem $n \geq 2$ num Sistema de $n$ EDOs de Primeira Ordem

Numa EDO linear de ordem  $n$  não homogênea,

$$\begin{array}{ccccccc}
a_n \underbrace{y^{(n)}} & + & a_{n-1} \underbrace{y^{(n-1)}} & + & a_{n-2} \underbrace{y^{(n-2)}} & + \cdots + & a_2 \underbrace{y''} + a_1 \underbrace{y'} + a_0 \underbrace{y(t)} = f(t) , \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x'_n(t) & & x_n(t) & & x_{n-1}(t) & & x_3(t) & x_2(t) & x_1(t)
\end{array}$$

se definirmos  $n$  funções  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  conforme indicado acima, ela se converte no seguinte sistema de  $n$  EDOs lineares de 1ª ordem não homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \frac{a_2}{a_n}x_3 \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1} + f(t) \end{array} \right. \quad \left[ \text{onde } x_1(t) = y(t) \right] .$$

Observe que essa conversão num sistema de EDOs lineares funciona independentemente de serem os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  constantes ou dependentes de  $t$ .

Nota: O método apresentado pode ser usado para converter uma EDO de ordem  $n$  da forma  $\underline{y^{(n)}}(t) = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  num sistema de  $n$  EDOs de 1ª ordem (não necessariamente linear), o que é fácil de mostrar, pois o procedimento é exatamente o mesmo; nesse caso se obterá o sistema de EDOs acima, exceto pela última equação, que passaria a ser  $x'_n = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Exemplo: Resolva a EDO  $y'' + 2y' - 24y(t) = 0$ : (a) convertendo-a num sistema linear de EDOs e resolvendo este sistema, e (b) pelo método das raízes da equação característica.

Item (a):

$$\begin{array}{ccccccc}
\underbrace{y''} & + & 2 \underbrace{y'} & - & 24 \underbrace{y(t)} & = & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
x'_2(t) & & x_2(t) & & x_1(t) & & 
\end{array} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = 24x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 24 & -2 \end{bmatrix}}_X \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X .$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 24 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2) - 24 = \lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases} .$$



$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 24 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha + \beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta/4 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=4} V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 24 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A - \lambda_2 I = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha + \beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta/6 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=-6} V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} e^{-6t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 e^{-6t} \\ 4c_1 e^{4t} - 6c_2 e^{-6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

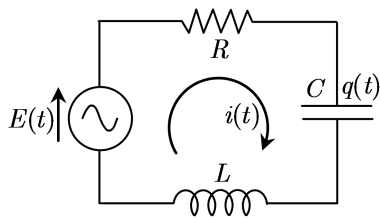
$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-6t} \blacksquare$$

Item (b):  $r^2 + 2r - 24 = 0 \Rightarrow r = 4 \text{ ou } -6 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-6t} \blacksquare$

Embora este exemplo tenha mostrado ser mais trabalhoso resolver EDO linear com coeficientes constantes usando o método explicado acima, de conversão num sistema linear, este método tem sua importância prática e teórica, porque insere a teoria de EDOs de ordem superior naquela de sistemas de primeira ordem.

### 3.4.2 Modelagem

#### 3.4.2.1 Circuitos Elétricos

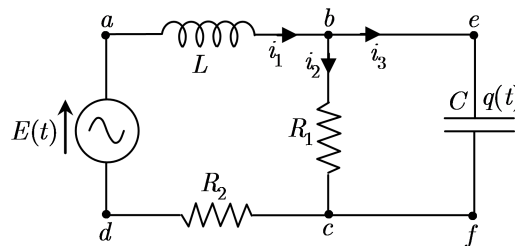


Um circuito elétrico com mais de uma malha pode ser descrito matematicamente por um sistema de equações diferenciais. Mas, antes destes, para relembrar alguns conceitos e procedimentos, considere o circuito de uma única malha mostrado à esquerda. Para calcular a corrente elétrica  $i(t)$  neste circuito, primeiramente igualamos o potencial  $E(t)$  suprido pela fonte de força eletromotriz à soma das *quedas de potencial* no resistor de resistência  $R$ , capacitor de capacitância  $C$  e carga elétrica armazenada  $q(t)$ , e indutor de indutância  $L$ , respectivamente *dadas por*  $Ri(t)$ ,  $q(t)/C$ , e  $L di/dt$ , obtendo uma equação diferencial figurando duas grandezas desconhecidas  $i(t)$  e  $q(t)$ . Com a substituição de  $i(t) = dq/dt$ , obtemos uma equação diferencial para  $q(t)$ :

$$\underbrace{E(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} + L \frac{di}{dt}}_{(*)} \xrightarrow{i = dq/dt} E(t) = R \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Da solução  $q(t)$  desta EDO calculamos finalmente a desejada corrente elétrica por diferenciação:  $i(t) = dq/dt$ . Outro modo seria derivar a equação (\*) acima para deduzir diretamente a seguinte EDO para  $i(t)$ :  $dE/dt = R di/dt + i(t)/C + L d^2 i/dt^2$ .

Exemplo 1: Considere o circuito elétrico abaixo. Para calcular as correntes elétricas nele, procedemos como acima em cada uma das malhas  $abcd$  e  $befc$ :



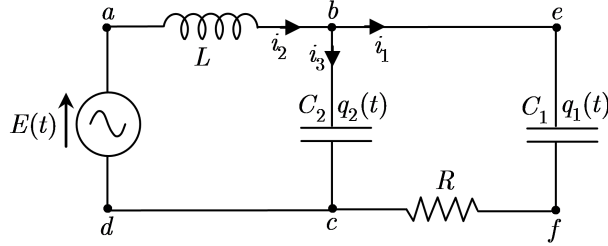
$$\text{Malha } abcd : E = L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 + R_2 i_1 .$$

$$\text{Malha } befc : 0 = \frac{q}{C} - R_1 i_2 \xrightarrow{d/dt} 0 = \frac{1}{C} \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{i_3} - R_1 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{1}{C} i_3 - R_1 \frac{di_2}{dt} .$$

Temos então duas equações com as três incógnitas  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ . Mas, no nó  $b$  do circuito elétrico, temos que  $i_1 = i_2 + i_3$ , donde  $i_3 = i_1 - i_2$ , equação que pode ser usada para eliminar  $i_3$ , obtendo-se o seguinte sistema de EDOs de 1ª ordem não homogêneo:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_2}{L} i_1(t) - \frac{R_1}{L} i_2(t) + \frac{E(t)}{L} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{R_1 C} i_1(t) - \frac{1}{R_1 C} i_2(t) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exemplo 2 : Calculemos as correntes elétricas no circuito elétrico abaixo.



$$\text{Malha } befc : \frac{q_1}{C_1} + R i_1 - \frac{q_2}{C_2} = 0 \xrightarrow[\frac{dq_1/dt = i_1, dq_2/dt = i_3}{\text{diferenciação}}]{} \frac{i_1}{C_1} + R \frac{di_1}{dt} - \frac{i_3}{C_2} = 0 .$$

$$\text{Malha } abcd : L \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} = E \xrightarrow[\frac{dq_2/dt = i_3}{\text{diferenciação}}]{} L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{i_3}{C_2} = E ,$$

onde  $dq_2/dt = i_3$  porque é a corrente  $i_3$  que causa a carga  $q_2$  no capacitor  $C_2$ (<sup>\*</sup>).

Temos duas equações com as três incógnitas  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , mas podemos eliminar  $i_3$  substituindo a igualdade  $i_3 = i_2 - i_1$  (válida no nó  $b$ ) nas duas equações acima:

$$\begin{cases} R \frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{C_1} i_1 + \frac{1}{C_2} (i_2 - i_1) = -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_1 + \frac{1}{C_2} i_2 \\ L \frac{d^2 i_2}{dt^2} = -\frac{1}{C_2} (i_2 - i_1) + \frac{dE}{dt} = \frac{1}{C_2} i_1 - \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{dE}{dt} . \end{cases}$$

Esse é um sistema não homogêneo de duas EDOs lineares e duas incógnitas,  $i_1$  e  $i_2$ , mas a segunda EDO é de 2ª ordem. Para obter um sistema de apenas EDOs lineares de 1ª ordem, exemplificando o modelo em (3.1), podemos, por meio da técnica descrita na subseção 3.4.1, converter a EDO de 2ª ordem em duas de 1ª ordem acrescentando a equação que define a nova incógnita  $I_3(t) \equiv di_2/dt$ (<sup>†</sup>). O resultado é o seguinte sistema não homogêneo de três EDOs lineares de 1ª ordem e três incógnitas  $i_1$ ,  $i_2$  e  $I_3$ :

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\left(\frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2}\right) i_1 + \frac{1}{RC_2} i_2 \\ \frac{di_2}{dt} = I_3 \\ \frac{dI_3}{dt} = \frac{1}{LC_2} i_1 - \frac{1}{LC_2} i_2 + \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} , \end{cases}$$

(<sup>\*</sup>)Teríamos  $dq_2/dt = i_2$  se permutássemos as notações  $i_2$  e  $i_3$ , mas outros aspectos do problema nos levaram a escolher a notação usada

(<sup>†</sup>)Denotamos  $di_2/dt$  por  $I_3$ , em vez de  $i_3$ , porque  $i_3$  já denota uma das correntes no circuito.

ou, matricialmente,

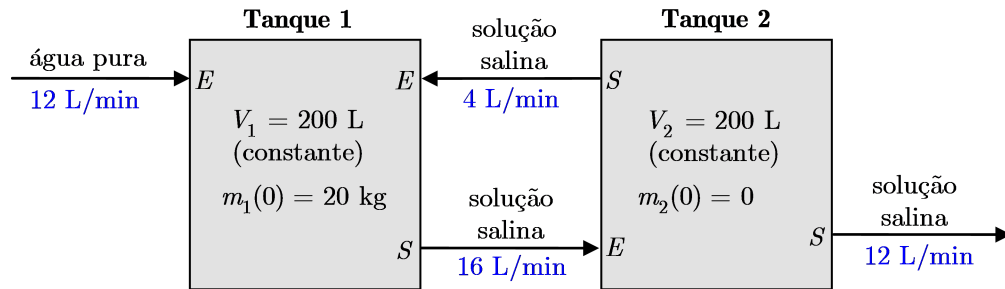
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2}\right) & \frac{1}{RC_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{LC_2} & -\frac{1}{LC_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} \end{bmatrix} \blacksquare$$

### 3.4.2.2 Tanques Misturadores

**Problema:** Numa instalação industrial existe o Tanque 1, que inicialmente continha 200 L de uma mistura de água e sal com concentração salina de 0,1 kg/L e no qual são despejados 12 L/min de água pura proveniente de uma caixa d'água, e existe o Tanque 2, que inicialmente continha 200 L de água pura e do qual são retirados 12 L/min do seu conteúdo para um reservatório especial. Sabendo que os conteúdos desses tanques são misturados pela ação de bombas que transferem 16 L/min do conteúdo do Tanque 1 para o 2 e 4 L/min do conteúdo do Tanque 2 para o 1, deduza um modelo matemático que descreve as massas  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$  de sal nos Tanques 1 e 2 em função do tempo, respectivamente. Admita que toda a solução salina nesse sistema mantenha-se homogeneamente misturada.

Solução:

Note que os volumes dos tanques se mantêm constantes, pois, em cada um, a vazão de entrada é igual à de saída (se não fosse assim, o problema seria um pouco mais complicado). Além disso, a massa inicial de sal no Tanque 1 é  $m_1(0) = 200 \text{ L} \times 0,1 \text{ kg/L} = 20 \text{ kg}$ . Então, com a informação de que dispomos, podemos esquematizar o problema como na figura abaixo, onde, em cada tanque,  $E$  e  $S$  indicam respectivamente pontos de entrada e saída de líquido.



Para formular o problema, levamos em conta o seguinte:

1. A taxa de variação da massa de sal  $dm/dt$  é, pela regra da cadeia, a concentração salina  $dm/dV$  multiplicada pela vazão  $dV/dt$ :  $\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt}$ .
2. A taxa de variação da massa de sal no tanque  $i$  ( $= 1$  ou  $2$ ) é igual à de entrada menos a de saída:  

$$\frac{dm_i}{dt} = \left. \frac{dm_i}{dt} \right|_E - \left. \frac{dm_i}{dt} \right|_S.$$
3. No Tanque 1 há dois pontos de entrada de líquido e um de saída. No Tanque 2, há um de entrada e dois de saída.
4. A mistura que sai do tanque  $i$  tem a concentração deste tanque, igual a  $m_i(t)/V_i$ . Assim, por exemplo, a mistura que sai do Tanque 1 para o Tanque 2 chega neste com a concentração  $m_1(t)/V_1$ .

A formulação do problema é, portanto, como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dt} &= \left. \frac{dm_1}{dt} \right|_E - \left. \frac{dm_1}{dt} \right|_S \\
&= \left[ \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} \right]_{1,E} - \left[ \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} \right]_{1,S} \\
&= \left[ \left( 0 \frac{\text{kg}}{\text{L}} \right) \left( 12 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) + \left( \frac{m_2}{200} \frac{\text{kg}}{\text{L}} \right) \left( 4 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) \right] - \left[ \left( \frac{m_1}{200} \frac{\text{kg}}{\text{L}} \right) \left( 16 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) \right] \\
&= -\frac{4}{50} m_1(t) + \frac{1}{50} m_2(t) \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{min}} \right] \blacksquare \quad (\text{I})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dm_2}{dt} &= \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_E - \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_S \\
&= \left[ \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} \right]_{2,E} - \left[ \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} \right]_{2,S} \\
&= \left[ \left( \frac{m_1}{200} \frac{\text{kg}}{\text{L}} \right) \left( 16 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) \right] - \left[ \left( \frac{m_2}{200} \frac{\text{kg}}{\text{L}} \right) \left( 4 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) + \left( \frac{m_2}{200} \frac{\text{kg}}{\text{L}} \right) \left( 12 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) \right] \\
&= \frac{4}{50} m_1(t) - \frac{4}{50} m_2(t) \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{min}} \right] \blacksquare \quad (\text{II})
\end{aligned}$$

Vemos que (I) e (II) formam um sistema de EDOs do tipo estudado.

### 3.5 Exercícios

- Escrever como um sistema de EDOs na chamada forma normal, isto é, na forma  $dX/dt = A(t)X(t) + F(t)$ :

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad y'' - 3y' + 4y = \sin 3t & \text{(b)} \quad y''' - 3y'' + 6y' - 10y = t^2 + 1 \\
\text{(c)} \quad 2y^{(4)} + y''' - 8y = 10 & \text{(d)} \quad t^2 y'' + ty' + (t^2 - 4)y = 0
\end{array}$$

Abaixo, os problemas 2 a 4 consistem em resolver sistemas de EDOs homogêneos da forma  $dX/dt = A X(t)$ . Os sistemas encontram-se agrupados, num mesmo problema, conforme os autovalores da matriz  $A$ , seguindo os três casos estudados.

- Matrizes cujos autovalores são todos reais e distintos:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} & \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

- Matrizes que apresentam autovalores imaginários:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

- Matrizes que apresentam autovalores reais repetidos:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \text{(ao autovalor 1, duplo, associa-se um único autovetor)} \\
\text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(ao autovalor -1, duplo, associam-se dois autovetores)}
\end{array}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ao autovalor } 2, \text{ duplo, associa-se um \u00fanico autovetor})$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ao autovalor } 2, \text{ triplo, associa-se um \u00fanico autovalor})$$

5. Agora se pede que sejam resolvidos os seguintes sistemas de EDOs n\u00e3o homog\u00eaneos:

$$(a) \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 12t \\ 12t \end{bmatrix} \quad (b) \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ t e^{3t} \end{bmatrix}$$

---

## Respostas

1. (a)  $\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -4x_1 + 3x_2 + \sin 3t \end{cases}$  (b)  $\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = 10x_1 - 6x_2 + 3x_3 + t^2 + 1 \end{cases}$
2. (a)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$  (b)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$
3. (a)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{bmatrix}$   
 (b)  $X = c_1 e^t \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix}$   
 (c)  $X = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$
4. (a)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right)$   
 (b)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$   
 (c)  $X = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$   
 (d)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right) + c_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$
5. (a)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -12t - 4/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$   
 (b)  $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} \\ -e^t + \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} \\ \frac{1}{2}t^2e^{3t} \end{bmatrix}$

## Capítulo 4

# Transformada de Laplace

{Ref. [13], seções 7.1 e 7.6}

### 4.1 Definição

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  definida para  $t \geq 0$ , denotada por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , é a função  $\bar{f}(s)$  resultante da seguinte integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \bar{f}(s) , \quad (4.1)$$

para os valores de  $s$  que tornem a integral convergente. Por exemplo, se  $f(t) = c$  (constante), então

$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^{\infty} e^{-st} c dt = c \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{c}{s} \left( -\underbrace{e^{-s \cdot \infty}}_0 + e^0 \right) = \frac{c}{s} ,$$

para  $s > 0$  (excluem-se  $s = 0$ , por implicar em divisão por zero, e  $s < 0$ , porque o termo indicado acima como nulo seria infinito).

Outro exemplo: se  $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 3) \\ 2 & (t \geq 3) \end{cases}$ , temos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^3 e^{-st} 0 dt + \int_3^{\infty} e^{-st} 2 dt = \frac{2e^{-st}}{-s} \Big|_{t=3}^{\infty} = \frac{2e^{-3s}}{s} \quad (s > 0) .$$

### 4.2 A Linearidade da Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt = a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} .$$

### 4.3 Condições Suficientes para a Existência da Transformada de Laplace e o Comportamento Assintótico Sob Essas Condições

Garante-se a existência da transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  definida para  $t \geq 0$  que seja

- contínua por partes, isto é, que exiba, em qualquer intervalo finito do seu domínio, um número finito (zero inclusive) de descontinuidades, nunca sendo infinita.
- de ordem exponencial, isto é, que, em valor absoluto, seja menor que alguma exponencial  $Me^{\lambda t}$  para  $t$  maior que algum  $T$ .

Além disso, sob essas condições,  $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  deve necessariamente tender a zero quando  $s \rightarrow \infty$ .<sup>(†)</sup>

---

<sup>(†)</sup> Assim, funções de  $s$  tais como  $s^2$  e  $s/(s+2)$  não são transformadas de Laplace de nenhuma função  $f(t)$  [ $t \geq 0$ ] que seja contínua por partes e de ordem exponencial.

De fato:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}\{f(t)\}| &= \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| = \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt \right| + \left| \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^T e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\leq |f|_{\max}} dt + \int_T^\infty e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\leq M e^{\lambda t}} dt \\
&\leq |f|_{\max} \int_0^T e^{-st} dt + M \int_T^\infty e^{-(s-\lambda)t} dt = |f|_{\max} \frac{e^{-sT} - 1}{-s} + M \frac{e^{-(s-\lambda)T}}{-(s-\lambda)} \Big|_{t=T}^\infty \\
&= |f|_{\max} \frac{e^{-sT} - 1}{-s} + M \left[ \underbrace{\frac{e^{-(s-\lambda)\infty}}{-(s-\lambda)}}_{0 \text{ para } s > \lambda} + \frac{e^{-(s-\lambda)T}}{s-\lambda} \right],
\end{aligned}$$

onde  $|f|_{\max}$  é o máximo de  $|f|$  em  $[0, T]$ ; logo,

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \leq |f|_{\max} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s e^{sT}} \right) + \frac{M}{(s-\lambda) e^{(s-\lambda)T}},$$

um resultado que, além de ser finito, comprovando a existência da transformada de Laplace, tende a zero quando  $s \rightarrow \infty$ .

#### 4.4 Cálculo de $\mathcal{L}$ de $e^{at}$ , $t^n$ , $\text{sen } at$ , $\cos at$ , $\text{senh } at$ , $\cosh at$

Nesta seção, considere  $a \in \mathbb{R}^{(*)}$ .

1) Se  $s > a$ , então:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_{t=0}^\infty = - \underbrace{\frac{e^{-(s-a)\infty}}{s-a}}_{0 \text{ para } s > a} + \frac{e^0}{s-a} = \frac{1}{s-a} \quad \blacksquare$$

2) Se  $s > 0$ , temos, integrando por partes, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{e^{-st}}{-s} t^n \Big|_{t=0}^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = - \frac{1}{s} \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st} t^n)}_{0 \text{ (l'Hôpital)}} + 0 + \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

$$n = 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$n = 2 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{2 \cdot 1}{s^3}$$

$$n = 3 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s} \frac{2 \cdot 1}{s^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4} = \frac{3!}{s^4}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \blacksquare$$

3) Se  $s > 0$ , então:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt = \frac{e^{-st}}{-s} \cos at \Big|_{t=0}^\infty - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\text{sen } at\} \quad (\text{i})$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen } at\} = \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at dt = \frac{e^{-st}}{-s} \text{sen } at \Big|_{t=0}^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt = 0 + \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\cos at\} \quad (\text{ii})$$

$$(\text{ii}) \text{ em } (\text{i}) \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \left[ \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\cos at\} \right] \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \blacksquare \quad (\text{iii})$$

$$(\text{iii}) \text{ em } (\text{ii}) \Rightarrow \mathcal{L}\{\text{sen } at\} = \frac{a}{s} \frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \blacksquare$$

---

(\*) Se  $a = 0$ , as transformadas de Laplace calculadas nesta seção fornecem, consistentemente,  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$  e  $\mathcal{L}\{0\} = 0$ .

4) Se  $s > |a|$  (por causa da necessidade de que exista a transformada de Laplace de  $e^{\pm at}$ ), então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2} [\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \blacksquare \\ \mathcal{L}\{\sinh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2} [\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{-at}\}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Com as fórmulas deduzidas até o momento, podemos calcular uma variedade de transformadas de Laplace sem recorrer à definição, isto é, sem efetuar a integral em (4.1). Observe, em particular, o uso da linearidade de  $\mathcal{L}$ . Por exemplo:

$$\begin{aligned}\text{i) } \mathcal{L}\{3t - 5 \sin 2t\} &= 3 \underbrace{\mathcal{L}\{t\}}_{1/s^2} - 5 \underbrace{\mathcal{L}\{\sin 2t\}}_{2/(s^2+4)} = \frac{-7s^2 + 12}{s^2(s^2 + 4)} \\ \text{ii) } \mathcal{L}\{\sin^2 t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2} \underbrace{\mathcal{L}\{1\}}_{1/s} - \frac{1}{2} \underbrace{\mathcal{L}\{\cos 2t\}}_{s/(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}\end{aligned}$$

## 4.5 Propriedades Especiais

Se  $\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t) dt$  existe então se demonstra que:

- 1)  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  existe para  $s \geq s_0$
- 2)  $\lim_{s \rightarrow c} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \left[ \lim_{s \rightarrow c} e^{-st} \right] f(t) dt = \int_0^\infty e^{-ct} dt$  para  $c \geq s_0$
- 3)  $\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial(e^{-st})}{\partial s} f(t) dt$  para  $s \geq s_0$
- 4)  $\int_{s_1}^{s_2} \left[ \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right] ds = \int_0^\infty \left[ \int_{s_1}^{s_2} e^{-st} ds \right] f(t) dt$  para  $s_0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$

## 4.6 Transformada de Laplace Inversa

Se a transformada de Laplace da função  $f(t)$  é a função  $\bar{f}(s)$ , definida por (4.1), então a transformada de Laplace inversa da função  $\bar{f}(s)$  é, por definição, a função  $f(t)$ , isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t) \quad .$$

Para determinar a transformada de Laplace inversa de uma função  $\bar{f}(s)$  dada, é necessário resolver a equação integral em (4.1). Em textos mais avançados, demonstra-se que, se tal equação tem uma solução  $f(t)$ , então ela é única. Esse resultado é conhecido como teorema de Lerch.

Exemplos:

- i)  $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad .$
- ii)  $\mathcal{L}^{-1}\{a\bar{f}(s) + b\bar{g}(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{\bar{g}(s)\} = af(t) + bg(t) \quad . \quad [\mathcal{L}^{-1} \text{ é linear}]$
- iii)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2t \quad .$
- iv)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t} \quad .$
- v)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!} t^4 \quad .$



$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4} \right\} &= 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - 3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+16} \right\} + \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\} \\ &= 4 e^{2t} - 3 \cos 4t + \frac{5}{2} \sin 2t . \end{aligned}$$

Nos exemplos seguintes, frações parciais (cf. seção 7.4 da Ref. [11]) são empregadas:

$$\text{vii)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)(s-5)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1/3}{s-2} + \frac{1/3}{s-5} \right\} = -\frac{1}{3} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{5t} .$$

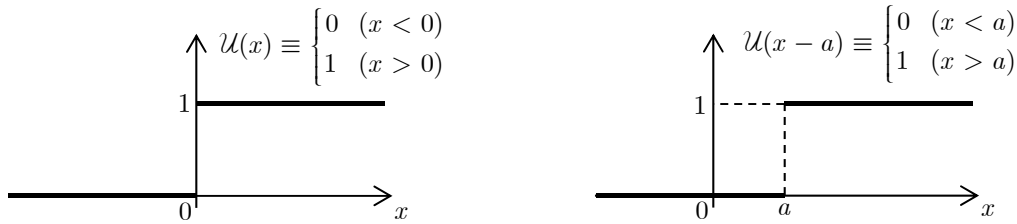
$$\text{viii)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \right\} = 1 - \cos t .$$

$$\text{ix)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{s^2-2s-3} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s-3} + \frac{-1}{s+1} \right\} = 4e^{3t} - e^{-t} .$$

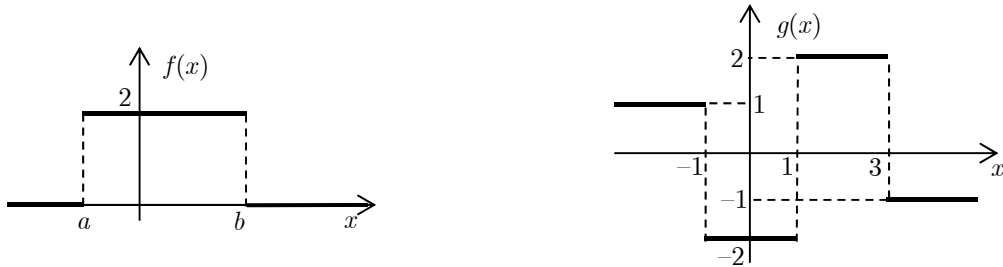
$$\text{x)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s^2-4s-7}{(s-3)(s^2+4)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s-3} + \frac{3s+5}{s^2+4} \right\} = 2e^{3t} + 3 \cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t .$$

## 4.7 Função Degrau Unitário

A função degrau unitário  $\mathcal{U}(x)$  é definida na figura abaixo, à esquerda. Na mesma figura, à direita, mostra-se que  $\mathcal{U}(x-a)$  representa uma translação do degrau. O valor dessa função em  $x = a$  é aqui ignorado, por ser geralmente irrelevante nos problemas em que ela se aplica (veja-se, entretanto, ao final desta seção, outras versões da função degrau que são definidas no ponto de descontinuidade). Além disso, num ponto  $x_i$  de descontinuidade de uma função  $f(x)$ , não seremos rigorosos em mostrar o valor  $f(x_i)$ .



Vejamos dois exemplos de uso dessa função. Considere a função  $f(x)$  na figura abaixo, à esquerda.



Sua expressão em termos da função degrau é

$$f(x) = 2 [\mathcal{U}(x-a) - \mathcal{U}(x-b)] .$$

Outro exemplo um pouco mais complicado é a função  $g(x)$  na figura acima, à direita; ela é dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + (-2-1) \mathcal{U}(x+1) + [2-(-2)] \mathcal{U}(x-1) + (-1-2) \mathcal{U}(x-3) \\ &= 1 - 3 \mathcal{U}(x+1) + 4 \mathcal{U}(x-1) - 3 \mathcal{U}(x-3) . \end{aligned}$$

No estudo da transformada de Laplace, a variável  $t$  não tem valor negativo. Assim,  $\mathcal{U}(t) = 1$ , e as funções  $f(t)$  e  $g(t)$  nos dois exemplos acima são, para  $t \geq 0$ , dadas por

$$f(t) = 2 - 2\mathcal{U}(t-b) \quad \text{e} \quad g(t) = -2 + 4\mathcal{U}(t-1) - 3\mathcal{U}(t-3) .$$

Consideremos agora funções descontínuas mais genéricas. Por exemplo, a função  $h(t)$  ao lado é dada por

$$h(t) = \phi(t) + [\alpha(t) - \phi(t)] \mathcal{U}(t-1) + [0 - \alpha(t)] \mathcal{U}(t-3) + [\beta(t) - 0] \mathcal{U}(t-4) + [\gamma(t) - \beta(t)] \mathcal{U}(t-6) + [-3 - \gamma(t)] \mathcal{U}(t-8).$$

Observe que, em  $t = 6$ , não há descontinuidade, mas uma mudança de  $\beta(t)$  para  $\gamma(t)$  na expressão da função  $h(t)$ .

Testando a equação acima com  $t = 5$ , obtemos o resultado esperado:

$$\begin{aligned} h(5) &= \phi(5) + [\alpha(5) - \phi(5)] \underbrace{\mathcal{U}(4)}_1 + [0 - \alpha(5)] \underbrace{\mathcal{U}(2)}_1 + [\beta(5) - 0] \underbrace{\mathcal{U}(1)}_1 + [\gamma(5) - \beta(5)] \underbrace{\mathcal{U}(-1)}_0 \\ &\quad + [-3 - \gamma(5)] \underbrace{\mathcal{U}(-3)}_0 = \cancel{\phi(5)} + \cancel{\alpha(5)} - \cancel{\phi(5)} - \cancel{\alpha(5)} + \beta(5) = \beta(5) \checkmark \end{aligned}$$

Note que esse cálculo envolve  $\phi(5)$ ,  $\alpha(5)$  e  $\gamma(5)$ , os quais, embora não sejam fornecidos na definição gráfica de  $h(t)$ , não afetam o resultado, pois se cancelam ou são multiplicados por zero. Podemos, obviamente, completar a definição das funções  $\phi(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t)$  acrescentando que elas se anulam fora dos intervalos em que são definidas graficamente.

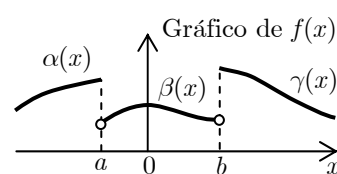
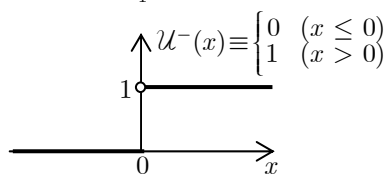
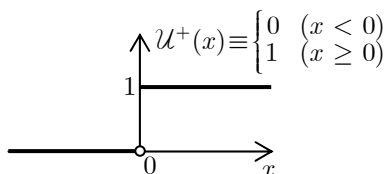
Nota : Para quem não quer deixar indefinidos os valores de funções nos seus pontos de descontinuidade, basta definir duas versões da função degrau unitário denotadas por  $\mathcal{U}^+(x)$  e  $\mathcal{U}^-(x)$  e mostradas nas figuras abaixo, que só diferem da função  $\mathcal{U}(x)$  no ponto de descontinuidade, em  $x = 0$ , onde são assim definidas:  $\mathcal{U}^+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x) = 1$  e  $\mathcal{U}^-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \mathcal{U}(x) = 0$ . Por meio delas, a função  $f(x)$  definida graficamente pela terceira figura abaixo, por exemplo, pode ser assim expressa:

$$f(x) = \alpha(x) + [\beta(x) - \alpha(x)] \mathcal{U}^-(x-a) + [\gamma(x) - \beta(x)] \mathcal{U}^+(x-b).$$

Essa expressão fornece os valores corretos nos pontos de descontinuidade:

$$f(a) = \alpha(a) + [\beta(a) - \alpha(a)] \underbrace{\mathcal{U}^-(0)}_0 + [\gamma(a) - \beta(a)] \underbrace{\mathcal{U}^+(a-b)}_0 = \alpha(a);$$

$$f(b) = \alpha(b) + [\beta(b) - \alpha(b)] \underbrace{\mathcal{U}^-(b-a)}_1 + [\gamma(b) - \beta(b)] \underbrace{\mathcal{U}^+(0)}_1 = \gamma(b).$$



Encerremos esta seção com o cálculo da transformada de Laplace de  $\mathcal{U}(t-a)$ , com  $a > 0$  :

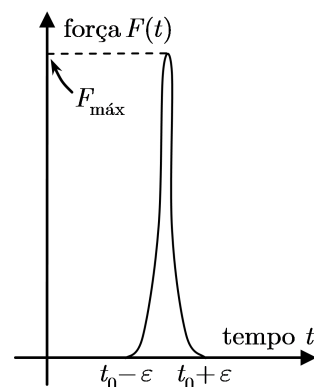
$$\boxed{\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}} = \int_0^\infty e^{-st} \mathcal{U}(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=a}^\infty = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0) \blacksquare$$

É óbvio que essa também é a transformada de Laplace das funções  $\mathcal{U}^\pm(t-a)$  ( $a > 0$ ).

## 4.8 Função Delta de Dirac

Com frequência um sistema mecânico é atuado por uma força externa de grande magnitude que age apenas por um tempo muito curto. Por exemplo, o gráfico da força em função do tempo durante uma rápida pancada é do tipo mostrado na figura à direita, com magnitude máxima  $F_{\max}$  muito grande e intervalo de duração muito curto (em torno do instante  $t_0$ ). Geralmente, a forma do pulso não é conhecida, mas isso não importa, porque a informação relevante é o impulso durante o intervalo de duração da força,

$$I = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} F(t) dt,$$



a partir do qual podemos calcular, por exemplo, o incremento da velocidade com a pancada:

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) \Rightarrow m \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} F(t) dt = I \Rightarrow m \underbrace{[v(t_0+\varepsilon) - v(t_0-\varepsilon)]}_{\Delta v} = I \Rightarrow \Delta v = \frac{I}{m}.$$

Paul Adrien Maurice Dirac tratou de problemas desse tipo com o que denominou *função delta*, a qual, em função da variável  $t \in [0, \infty)$  (que pode ser o tempo) e do parâmetro  $t_0 \in [0, \infty)$ , é dada por

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq t_0 \\ \infty & \text{se } t = t_0 \end{cases} \quad (4.2a)$$

sob a condição da *normalização unitária*

$$\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (t_0 \geq 0) \quad (4.2b)$$

Em vista dessa definição, podemos dizer que a função delta  $\delta(t - t_0)$  está localizada no ponto  $t_0$ .

Naturalmente,  $\delta(t - t_0)$  não é função, mas Dirac usou-a *formalmente* como tal, algo que, depois, veio a ser rigorosamente justificado pela teoria das distribuições elaborada pelo matemático Laurent Schwartz. Por meio dela podemos exprimir a força considerada acima por  $F(t) = I \delta(t - t_0)$ . Essa expressão tem as duas propriedades desejadas: só não é nula no instante  $t_0$  da pancada e tem impulso  $\int_0^\infty F(t) dt = I \int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = I$ .

A principal propriedade da função delta é expressa pela equação

$$\int_0^\infty f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (t_0 \geq 0) \quad (4.3)$$

que é assim verificada:

$$\int_0^\infty f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_0^\infty f(t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \underbrace{\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt}_1 = f(t_0) \quad ,$$

onde, no integrando, podemos substituir  $f(t)$  por  $f(t_0)$  porque apenas esse valor de  $f(t)$  contribui para a integral, já que  $\delta(t - t_0)$  se anula em todo ponto distinto de  $t_0$ . Essa é a chamada propriedade de *filtragem* (ou de *peneiração*), uma vez que a integral acima fornece (filtra) o valor de  $f(t)$  no ponto  $t_0$  no qual  $\delta(t - t_0) \neq 0$ .

Dirac conjecturou (e depois se provou) a validade de se operar normalmente com a função delta como se ela fosse uma função ordinária, podendo inclusive ser diferenciada e integrada, satisfazendo as diversas propriedades dessas operações. Assim, deve ser válida a equação {v. Ref. [2], subseção 1.1.2}

$$1 = \int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = \underbrace{\int_0^{t_0} \delta(t - t_0) dt}_{I_-} + \underbrace{\int_{t_0}^\infty \delta(t - t_0) dt}_{I_+} \quad ,$$

que nos enseja questionar quais são os valores das integrais  $I_+$  e  $I_-$  acima, nas quais a função delta está localizada num extremo do intervalo de integração. Quaisquer valores não negativos satisfazendo  $I_+ + I_- = 1$  podem ser atribuídos a elas, mas aqui escolhemos  $I_+ = 1$  e  $I_- = 0$ , isto é,

$$\int_{t_0}^\infty \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{t_0} \delta(t - t_0) dt = 0 \quad (t_0 \geq 0) \quad (4.4)$$

permitindo-nos dizer que a integral da função delta só é unitária quando o intervalo de integração se estende para a direita de onde ela está localizada, o que pode ser assim expresso:

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & \text{se } t_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{se } t_0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (4.5)$$

Essa equação, em outras palavras, informa que a integral da função delta só não se anula se ela estiver localizada num ponto interior do intervalo de integração ou no extremo inferior desse intervalo, em conformidade com a escolha em (4.4).

A razão dessa escolha é que desejamos o seguinte resultado, consistente com a normalização unitária da função delta dada por (4.2b) no caso em que  $t_0 = 0$ :

$$\int_0^\infty \delta(t) dt = 1 \quad , \quad (4.6)$$

onde a integral começa no ponto  $t = 0$  onde se localiza a função delta. Em outras aplicações da função delta distintas das que são consideradas neste texto pode ser mais conveniente uma escolha diferente daquela em (4.4), o que acarretaria uma pequena variação na definição da função delta em (4.2).

Nesta descrição bem curta da função delta, consideramos mais três propriedades dela. Vejamos a primeira:

$$\overline{\int_a^t \delta(\tau - t_0) d\tau} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } t > t_0 \\ 0 & \text{se } t \leq t_0 \end{array} \right\} = \overline{\mathcal{U}^-(t - t_0) \text{ (com } 0 \leq a < t_0)} \quad , \quad (4.7)$$

expressando que a integral indefinida da função delta é a versão  $\mathcal{U}^-(t - t_0)$  da função degrau unitário definida na Nota enunciada na pág. 65, ou, em outros termos, que  $\mathcal{U}^-(t - t_0)$  é uma primitiva de  $\delta(t - t_0)$ . Em vista disso, espera-se que a derivada dessa função degrau unitário seja a função delta:

$$\left[ \frac{d}{dt} \mathcal{U}^-(t - t_0) = \delta(t - t_0) \right] \quad . \quad (4.8)$$

De fato; eis como Dirac justificou isso {v. Ref. [6], seção 15}:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \mathcal{U}^-(t - t_0) dt &\stackrel{\text{p.p.}}{=} \left[ f(t) \mathcal{U}^-(t - t_0) \right]_0^\infty - \int_0^\infty f'(t) \mathcal{U}^-(t - t_0) dt \\ &= f(\infty) \underbrace{\mathcal{U}^-(\infty)}_1 - f(0) \underbrace{\mathcal{U}^-(-t_0)}_0 - \int_{t_0}^\infty f'(t) dt \\ &= \cancel{f(\infty)} - [\cancel{f(\infty)} - f(t_0)] = f(t_0) = \int_0^\infty f(t) \delta(t - t_0) dt \quad , \end{aligned}$$

mostrando que  $(d/dt)\mathcal{U}^-(t - t_0)$  e  $\delta(t - t_0)$  são expressões equivalentes quando, no integrando, são multiplicadas por uma função contínua  $f(t)$  arbitrária (têm a mesma propriedade de filtragem).

A última propriedade aqui considerada, dada por

$$\left[ \delta[a(t - t_0)] = \frac{1}{a} \delta(t - t_0) \text{ (com } a > 0) \right] \quad , \quad (4.9)$$

é assim verificada:

$$\int_0^\infty \delta[a(t - t_0)] f(t) dt \stackrel{at \equiv \tau}{=} \int_0^\infty \delta[\tau - at_0] f\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{d\tau}{a} = f(t_0) \frac{1}{a} = \int_0^\infty \frac{1}{a} \delta(t - t_0) f(t) dt \quad ,$$

mostrando que  $\delta[a(t - t_0)]$  e  $(1/a)\delta(t - t_0)$  são equivalentes.

Vamos encerrar esta seção com o cálculo da transformada de Laplace da função delta, que é realizado simplesmente com o uso da propriedade de filtragem:

$$\overline{\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}} = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt = \overline{e^{-st_0} \text{ (} t_0 \geq 0 \text{)}} \quad \blacksquare$$

## 4.9 Tabela de Transformadas de Laplace de Funções Específicas

Na tabela abaixo, listamos as transformadas de Laplace de algumas funções específicas, já calculadas nas seções anteriores:

<u><math>f(t)</math></u>	<u><math>\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}</math></u>	
1	$\frac{1}{s}$	$(s > 0)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$(s > a \in \mathbb{R})$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(n = 1, 2, 3, \dots)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$(a \in \mathbb{R}, s > 0)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$(a \in \mathbb{R}, s > 0)$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$(s >  a  \in \mathbb{R})$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$(s >  a  \in \mathbb{R})$
$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$(a > 0, s > 0)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-st_0}$	$(s > 0)$

## 4.10 Cálculo de $\mathcal{L}$ de $f(at)$ , $e^{at}f(t)$ , $t^n f(t)$ , $\mathcal{U}(t-a)f(t-a)$ , $f(t)/t$

Seguem as deduções das cinco fórmulas dessas transformadas de Laplace:

$$1^{\text{a}}) \quad \mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt \quad u \equiv at \quad \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)u} f(u) du = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{para } a > 0 \quad \blacksquare$$

$$2^{\text{a}}) \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} [e^{at}f(t)] dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = \bar{f}(s-a)$$

$$\text{ou, equivalentemente, } \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)|_{s \rightarrow s-a}\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} \quad \blacksquare$$

$$3^{\text{a}}) \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t) dt = \int_0^\infty (-1)^n \frac{\partial^n (e^{-st})}{\partial s^n} f(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \overbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}^{\bar{f}(s)} \\ = (-1)^n \bar{f}^{(n)}(s) \quad \blacksquare$$

$$\text{Em particular: } \mathcal{L}\{t f(t)\} = -\bar{f}'(s), \quad \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \bar{f}''(s), \quad \mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = -\bar{f}'''(s), \quad \dots$$

$$4^{\text{a}}) \quad \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} \mathcal{U}(t-a)f(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \\ \stackrel{\tau \equiv t-a}{=} \int_0^\infty e^{-s(a+\tau)} f(\tau) d\tau = e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-as} \bar{f}(s) \quad \blacksquare$$

$$5^a) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-st}}{t}\right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-\sigma t} d\sigma\right] dt = \int_s^\infty \overbrace{\int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} dt}^{\bar{f}(\sigma)} d\sigma \\ = \int_s^\infty \bar{f}(\sigma) d\sigma \quad \blacksquare$$

Exemplos:

i) Como  $\mathcal{L}\{\cos t\} = s/(s^2 + 1)$ , então

$$\mathcal{L}\{\cos 7t\} = \frac{1}{7} \frac{(s/7)}{(s/7)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 49} \quad (\text{usando a 1ª fórmula})$$

$$\mathcal{L}\{e^{5t} \cos 3t\} = \mathcal{L}\{\cos 3t\} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{s}{s^2 + 9} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{s-5}{(s-5)^2 + 9} \quad (\text{usando a 2ª fórmula})$$

$$\text{Problema inverso: } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-5}{(s-5)^2 + 9}\right\} \stackrel{2^a \text{ fórmula}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9} \Big|_{s \rightarrow s-5}\right\} = e^{5t} \cos 3t.$$

ii) Uso da 3ª fórmula:

$$\mathcal{L}\{t \cos 3t\} = -\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right)' = -\frac{s^2 + 9 - s(2s)}{(s^2 + 9)^2} = \frac{s^2 - 9}{(s^2 + 9)^2}.$$

$$\mathcal{L}\{t e^{5t}\} = -\left(\frac{1}{s-5}\right)' = \frac{1}{(s-5)^2}.$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\} = \left(\frac{1}{s-5}\right)'' = \left[-(s-5)^{-2}\right]' = 2(s-5)^{-3} = \frac{2}{(s-5)^3}.$$

Esses dois últimos resultados também podem ser obtidos (e até mais diretamente, evitando derivadas) por meio da 2ª fórmula com  $f(t) = t$  e  $f(t) = t^2$ , respectivamente:

$$\mathcal{L}\{t e^{5t}\} = \mathcal{L}\{t\} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{1}{(s-5)^2},$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\} = \mathcal{L}\{t^2\} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{2}{s^3} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{2}{(s-5)^3}.$$

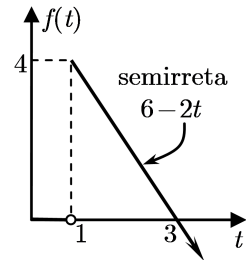
iii) Cálculo da transformada de Laplace da função  $f(t)$  cujo gráfico é o da figura à direita: uma semirreta partindo do ponto (1,4).

1º modo – Usando a 4ª fórmula, isto é,  $\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \bar{f}(s)e^{-as}$ :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 1) \\ 6-2t & (t \geq 1) \end{cases} = \underbrace{(6-2t)}_{\equiv p(t-1)} \mathcal{U}(t-1).$$

$$p(t-1) \equiv 6-2t \Rightarrow p(t) = 6-2(t+1) = 4-2t.$$

$$\therefore \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{p(t-1)\mathcal{U}(t-1)\} = \bar{p}(s)e^{-s} = \left(\frac{4}{s} - \frac{2}{s^2}\right)e^{-s}.$$



2º modo (pode levar a mais contas) – Usando a 3ª fórmula:

Uma vez que  $f(t) = (6-2t)\mathcal{U}(t-1) = 6\mathcal{U}(t-1) - 2t\mathcal{U}(t-1)$ , temos que

$$\bar{f}(s) = 6 \frac{e^{-s}}{s} + 2 \left(\frac{e^{-s}}{s}\right)' = 6 \cdot \frac{e^{-s}}{s} + 2 \cdot \frac{-e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = \frac{6}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} = \left(\frac{4}{s} - \frac{2}{s^2}\right)e^{-s}.$$

iv) Usemos agora a 4ª fórmula na forma  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\bar{f}(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$ , isto é, para o problema inverso:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s} \underbrace{\frac{1}{s^3}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ t^2/2}}\right\} = \mathcal{U}(t-5) \frac{(t-5)^2}{2}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s} \underbrace{\frac{1}{s^2+9}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ (\sin 3t)/3}}\right\} = \mathcal{U}(t-5) \frac{1}{3} \sin 3(t-5) .$$

v) Uso da 5ª fórmula:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1} d\sigma = \arctan \sigma \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s \quad (s > 0) .$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{\sigma+1} - \frac{1}{\sigma+3}\right) d\sigma = \ln \frac{\sigma+1}{\sigma+3} \Big|_s^\infty = \ln 1 - \ln \frac{s+1}{s+3} = \ln \frac{s+3}{s+1} .$$

$$\begin{aligned} \text{vi) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} &\stackrel{\text{frações}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{-7}{(s-2)^3}\right\} \\ &= -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 4te^{2t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} , \end{aligned}$$

onde a inversão dos últimos dois termos foi efetuada usando a 2ª fórmula:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\Big|_{s \rightarrow s-2}\right\} = 4te^{2t} , \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{(s-2)^3}\right\} &= -\frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\Big|_{s \rightarrow s-2}\right\} = -\frac{7}{2}t^2e^{2t} , \end{aligned}$$

No próximo exemplo, resolvemos novamente o Exemplo (ix) da seção 4.6, mas, agora, completando o quadrado no denominador (em vez de usar frações parciais):

$$\begin{aligned} \text{vii) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{3 \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2-4} + 5 \cdot \frac{2}{(s-1)^2-4}\right\} = e^t[3 \cosh 2t + 5 \sinh 2t] \\ &= e^t\left[3 \cdot \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} + 5 \cdot \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right] = 4e^{3t} - e^{-t} . \end{aligned}$$

Modificando um pouco esse exemplo, obtemos o seguinte, que, não admitindo solução por frações parciais (pois o denominador não é, em  $\mathbb{R}$ , fatorável em monômios), é resolvido pela técnica de completar o quadrado:

$$\text{viii) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{3 \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2+4} + 5 \cdot \frac{2}{(s-1)^2+4}\right\} = e^t[3 \cos 2t + 5 \sin 2t]$$

## 4.11 Transformada de Laplace de Derivadas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \overbrace{e^{-st} f(t)}^{0-f(0)} \Big|_{t=0}^\infty + s \overbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}^{\mathcal{L}\{f(t)\}} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ &= s\bar{f}(s) - f(0) \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s[\mathcal{L}\{f'(t)\}] - f'(0) = s[s\bar{f}(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0) \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s[s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)] - f''(0) \\ &= s^3\bar{f}(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \blacksquare \end{aligned}$$

⋮

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \blacksquare$$

Essa última fórmula, para a derivada de ordem  $n$ , é válida se

- $f^{(n)}(t)$  for contínua por partes
- $f^{(k)}(t) \Big|_{k=0,1,\dots,n-1}$  forem contínuas
- $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$  forem de ordem exponencial

## 4.12 Transformada de Laplace de Integrais

É fácil deduzir que

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{\bar{f}(s)}{s} \quad (s > 0) . \quad (4.10)$$

Eis a dedução:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^t f(u) du \right] dt = \int_0^\infty f(u) \left[ \int_u^\infty e^{-st} dt \right] du = \int_0^\infty f(u) \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=u}^\infty du \\ &= \int_0^\infty f(u) \frac{e^{-s\infty} - e^{-su}}{-s} du = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = \frac{1}{s} \bar{f}(s) \blacksquare \end{aligned}$$

Mais genericamente, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_a^t f(u) du \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du - \int_0^a f(u) du \right\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} - \mathcal{L} \left\{ \int_0^a f(u) du \right\} \\ &= \frac{\bar{f}(s)}{s} - \frac{1}{s} \int_0^a f(u) du \blacksquare \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t \sin 2u du \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{ \sin 2t \} = \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s(s^2 + 4)} ;$$

de fato, obtemos esse mesmo resultado efetuando a integral e então calculando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \sin 2u du \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{-\cos 2u}{2} \Big|_0^t \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{-\cos 2t + 1}{2} \right\} = -\frac{1}{2} \mathcal{L} \{ \cos 2t \} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ 1 \} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \frac{s^2 + 4 - s^2}{s(s^2 + 4)} = \frac{2}{s(s^2 + 4)} . \end{aligned}$$

Outro exemplo:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t e^{-2u} \cos 3u du \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{ e^{-2t} \cos 3t \} = \frac{1}{s} \left[ \frac{s}{s^2 + 9} \right]_{s \rightarrow s+2} = \frac{s+2}{s[(s+2)^2 + 9]} .$$

A equação (4.10) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{f}(s)}{s} \right\} = \int_0^t f(u) du . \quad (4.11)$$

Essa fórmula pode ser útil em vários cálculos da transformada de Laplace inversa. De fato, por meio dela, o exemplo (viii) na p. 64 torna-se mais fácil; o cálculo das frações parciais (omitido naquele exemplo) é mais trabalhoso do que o seguinte:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/(s^2 + 1)}{s} \right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} du = \int_0^t \sin u du = 1 - \cos t .$$



### 4.13 Cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\}$ por Convolução

A operação definida abaixo entre duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$ ,

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(u) g(t-u) du ,$$

é chamada de convolução ou produto convolutivo dessas funções. É uma operação comutativa:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u) g(t-u) du \stackrel{v \equiv t-u}{=} \int_0^t g(v) f(t-v) dv = g(t) * f(t) .$$

O chamado teorema da convolução diz que a transformada de Laplace inversa do produto *aritmético*  $\bar{f}(s)\bar{g}(s)$  é o produto *convolutivo*  $f(t) * g(t)$ , isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t) .$$

A prova desse teorema é como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) g(t-u) du\right\} = \int_0^\infty dt e^{-st} \int_0^t du f(u) g(t-u) \\ &= \int_0^\infty du f(u) \int_u^\infty dt e^{-st} g(t-u) \stackrel{v \equiv t-u}{=} \int_0^\infty du f(u) \int_0^\infty dv e^{-s(u+v)} g(v) \\ &= \underbrace{\int_0^\infty du e^{-su} f(u)}_{\bar{f}(s)} \underbrace{\int_0^\infty dv e^{-sv} g(v)}_{\bar{g}(s)} = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplifiquemos seu uso:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 s^2}\right\} &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}}_{t e^{-t}} * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}}_t = \underbrace{(t e^{-t})}_{f(t)} * \underbrace{t}_{g(t)} = \int_0^t \underbrace{u e^{-u}}_{f(u)} \underbrace{(t-u)}_{g(t-u)} du \\ &= t \int_0^t u e^{-u} du - \int_0^t u^2 e^{-u} du = \dots = t e^{-t} + 2e^{-t} + t - 2 . \end{aligned}$$

$$\text{Conferindo: } \mathcal{L}\{t e^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)^2} \quad \checkmark$$

Como exemplo adicional, recalculemos a transformada de Laplace inversa já obtida no Exemplo (viii) da seção 4.6 por frações parciais e pela fórmula em (4.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)s}\right\} &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}}_{\text{sen } t} * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_1 = \underbrace{\text{sen } t}_{f(t)} * \underbrace{1}_{g(t)} = \int_0^t \underbrace{\text{sen } u}_{f(u)} \underbrace{1}_{g(t-u)} du \\ &= \int_0^t \text{sen } u du = -\cos u \Big|_0^t = -\cos t + 1 . \end{aligned}$$

### 4.14 Transformada de Laplace de Função Periódica

Se a função  $f(t)$  tem período  $T$ , isto é,  $f(t) = f(t+T) \forall t \geq 0$ , então:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt . \quad (\text{i})$$

Mas

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \stackrel{\tau \equiv t-T}{=} \int_0^\infty e^{-s(T+\tau)} \underbrace{f(\tau+T)}_{f(\tau)} d\tau = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} . \quad (\text{ii})$$

Logo, substituindo (ii) em (i), obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} ,$$

donde

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \blacksquare$$

Por exemplo, calculemos, usando essa fórmula, a transformada de Laplace da função de período unitário dada por  $f(t) = t$  para  $0 \leq t < 1$  e  $f(t+1) = f(t)$  para todo  $t \geq 0$ :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^1 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-s}} = \frac{\left[ \int_0^1 e^{-st} t dt \right]}{1 - e^{-s}} = \frac{\left[ -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \right]}{1 - e^{-s}} = \frac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})} .$$

## 4.15 Tabela de Transformadas de Laplace com Funções Genéricas

Na tabela abaixo, listamos as fórmulas envolvendo transformadas de Laplace de funções genéricas que já foram deduzidas nas seções anteriores:

- 1)  $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\bar{f}(s) + b\bar{g}(s)$
- 2)  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\bar{f}(s) - f(0)$
- 3)  $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$
- 4)  $\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\bar{f}(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$
- 5)  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
- 6)  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{\bar{f}(s)}{s}$
- 7)  $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\bar{f}'(s)$
- 8)  $\mathcal{L}\{t^2f(t)\} = \bar{f}''(s)$
- 9)  $\mathcal{L}\{t^3f(t)\} = -\bar{f}'''(s)$
- 10)  $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \bar{f}^{(n)}(s)$
- 11)  $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
- 12)  $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \bar{f}(s-a)$
- 13)  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\bar{f}(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$
- 14)  $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t)$
- 15)  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$  para uma função  $f(t)$  de período  $T$
- 16)  $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \bar{f}(\sigma) d\sigma$

## 4.16 Aplicações

### 4.16.1 Cálculo de Integrais Definidas

Eis alguns exemplos de como a transformada de Laplace auxilia no cálculo de integrais definidas:

$$\text{i)} \int_0^\infty t e^{-2t} \cos t \, dt = \int_0^\infty e^{-st} t \cos t \, dt \Big|_{s=2} = \mathcal{L}\{t \cos t\} \Big|_{s=2} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \Big|_{s=2} = \frac{3}{25} ,$$

onde usamos o resultado obtido no exemplo (iii) da seção 4.10.

$$\text{ii)} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt = \int_0^\infty e^{-st} \left( \frac{\sin t}{t} \right) \, dt \Big|_{s \rightarrow 0^+} = \frac{\pi}{2} - \arctan s \Big|_{s \rightarrow 0^+} = \frac{\pi}{2} ,$$

onde usamos o resultado obtido no exemplo (v) da seção 4.10.

$$\text{iii)} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \, dt = \int_0^\infty e^{-st} \left( \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right) \, dt \Big|_{s=0} = \ln \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=0} = \ln 3 ,$$

onde usamos o resultado obtido no exemplo (vi) da seção 4.10.

A aplicação dessa técnica requer atenção com o valor de  $s$  a ser substituído, como mostra o cálculo errôneo seguinte:

$$\int_0^\infty e^{2t} t^9 \, dt = \int_0^\infty e^{-st} t^9 \, dt \Big|_{s=-2} = \mathcal{L}\{t^9\} \Big|_{s=-2} = \frac{9!}{s^{10}} \Big|_{s=-2} = \frac{9!}{2^{10}} .$$

Esse resultado não pode ser correto, pois a integral é claramente divergente: o integrando  $e^{2t} t^9$  não tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , não satisfazendo uma condição necessária para a convergência da integral. O erro está no uso da fórmula  $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$  com  $s = -2$ , violando a restrição  $s > 0$  (cf. seção 4.4, item 2).

### 4.16.2 Resolução de Equações Com Derivada Ou Integral

Observe alguns exemplos de como a transformada de Laplace auxilia na resolução de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad y' - 3y &= e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{y' - 3y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} \quad \Rightarrow \quad s\bar{y}(s) - y(0) - 3\bar{y}(s) = 1/(s-2) \\ \Rightarrow \quad \bar{y}(s) &= \frac{y(0)}{s-3} + \frac{1}{(s-2)(s-3)} \stackrel{\text{frações}}{=} \frac{-1}{s-2} + \frac{y(0)+1}{s-3} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = -e^{2t} + \underbrace{[y(0)+1]}_{\equiv c} e^{3t} , \end{aligned}$$

que é a solução geral, haja vista a presença da constante arbitrária  $c \equiv y(0) + 1$  [não há restrição no valor de  $y(0)$ ]. Note que, na solução geral obtida, se fizermos  $t = 0$ , obtemos a identidade  $y(0) = y(0)$ .

ii) Resolução do problema de valor inicial  $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 6$ :

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= t^2 e^{3t} \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} s^2 \bar{y}(s) - \underbrace{s y(0)}_2 - \underbrace{y'(0)}_6 - 6[s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_2] + 9\bar{y}(s) = 2/(s-3)^3 \\ \underbrace{(s^2 - 6s + 9)}_{(s-3)^2} \bar{y}(s) &= 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3} \Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5} \\ y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \underbrace{2e^{3t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}}_{t^4/4!} = 2e^{3t} + \frac{1}{12} t^4 e^{3t} \end{aligned}$$

iii) Resolução do problema de valor inicial  $y' - 5y(t) = f(t) = \begin{cases} 2 & (0 \leq t < 4) \\ -3 & (t \geq 4) \end{cases}$ ,  $y(0) = 0$  :

$$y' - 5y(t) = f(t) = 2 - 5\mathcal{U}(t - 4)$$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\mathcal{L}} \quad s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_0 - 5\bar{y}(s) &= \frac{2}{s} - 5 \frac{e^{-4s}}{s} \Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{1}{\underbrace{s(s-5)}_{\frac{-1/5}{s} + \frac{1/5}{s-5}}} (2 - 5e^{-4s}) \\ \Rightarrow \quad \bar{y}(s) &= \frac{-2/5}{s} + \frac{2/5}{s-5} + \left( \underbrace{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-5}}_{\downarrow \mathcal{L}^{-1}} \right) e^{-4s} \Rightarrow y(t) = \frac{2}{5}(e^{5t} - 1) + [1 - e^{5(t-4)}] \mathcal{U}(t - 4) . \end{aligned}$$

Essa solução também pode ser escrita, sem uso da função degrau, na forma

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}(e^{5t} - 1) & (0 \leq t \leq 4) \\ \frac{2}{5}(e^{5t} - 1) + 1 - e^{5(t-4)} & (t \geq 4) . \end{cases}$$

Note que  $y(4^-) = y(4^+) = 2(e^{20} - 1)/5$ , ou seja, solução obtida é contínua em  $t = 4$ .

iv) Resolução da *equação íntegro-diferencial*

$$16y' + 24y(t) + 9 \int_0^t y(u) du = 1$$

sob a condição  $y(0) = 0$ . Tomando a transformada de Laplace de cada termo, obtemos

$$\begin{aligned} 16[s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_0] + 24\bar{y}(s) + 9 \frac{\bar{y}(s)}{s} &= \frac{1}{s} \Rightarrow \underbrace{(16s^2 + 24s + 9)}_{(4s+3)^2} \bar{y}(s) = 1 \\ \Rightarrow \quad \bar{y}(s) &= \frac{1}{(4s+3)^2} = \frac{1/16}{(s+3/4)^2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{16} t e^{-3t/4} . \end{aligned}$$

v) Resolução do problema de valor inicial  $y'' + y = -\delta(t - \pi)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  :

$$\begin{aligned} y'' + y = -\delta(t - \pi) \xRightarrow{\mathcal{L}} \quad s^2\bar{y}(s) - s\underbrace{y(0)}_0 - \underbrace{y'(0)}_1 + \bar{y}(s) &= -e^{-\pi s} . \\ \bar{y}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - \left( \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{\downarrow \mathcal{L}^{-1}} \right) e^{-\pi s} &\Rightarrow y(t) = \underbrace{\text{sen } t - \mathcal{U}(t - \pi) \text{sen}(t - \pi)}_{-\text{sen } t} . \\ \bar{y}(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} - \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) e^{-\pi s} \Rightarrow y(t) = \text{sen } t - \mathcal{U}(t - \pi) \text{sen } t = \begin{cases} \text{sen } t & (t \leq \pi) \\ 2 \text{sen } t & (t \geq \pi) . \end{cases} \end{aligned}$$

vi) Resolução do problema de valor inicial  $y' + y = 3\delta(t) + 5\mathcal{U}(t - 2)$ ,  $y(0) = 1$  :

Note o uso da equação (4.6).

$$\begin{aligned} y' + y = 3\delta(t) + 5\mathcal{U}(t - 2) \xRightarrow{\mathcal{L}} \quad s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_1 + \bar{y}(s) &= 3 + 5 \frac{e^{-2s}}{s} . \\ \bar{y}(s) = \frac{4}{s+1} + 5e^{-2s} \underbrace{\frac{1}{s(s+1)}}_{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}} &= \frac{4}{s+1} + 5e^{-2s} \left( \underbrace{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}}_{\downarrow \mathcal{L}^{-1}} \right) . \\ y(t) = 4e^{-t} + 5[1 - e^{-(t-2)}] \mathcal{U}(t - 2) &= \begin{cases} 4e^{-t} & (t \leq 2) \\ 4e^{-t} + 5 - 5e^{-(t-2)} & (t \geq 2) . \end{cases} \end{aligned}$$

### 4.16.3 Resolução de Sistemas de EDOs

Exemplo 1:  $\begin{cases} 2x' + y' - y(t) = t \\ x' + y' = t^2 \end{cases}$  sob as condições  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ .

A transformada de Laplace dessas equações são

$$\begin{cases} 2[s\bar{x}(s) - \underbrace{x(0)}_1] + s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_0 - \bar{y}(s) = 1/s^2 \\ s\bar{x}(s) - \underbrace{x(0)}_1 + s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_0 = 2/s^3 \end{cases} \Rightarrow (\star) \begin{cases} 2s\bar{x} + (s-1)\bar{y} = 2 + 1/s^2 \\ s\bar{x}(s) + s\bar{y} = 1 + 2/s^3 \end{cases}$$

Eliminando  $\bar{x}$  no sistema  $(\star)$ , obtemos

$$-(s+1)\bar{y} = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4}{s^3(s+1)} - \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{4-s}{s^3(s+1)}.$$

Frações parciais:  $\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1} \Rightarrow A = -B = -D = 5 \text{ e } C = 4.$

$$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1} \right\} = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \blacksquare$$

Agora eliminamos  $\bar{y}$  no sistema  $(\star)$ , multiplicando a 1ª equação por  $[s]$ , a 2ª por  $[-(s-1)]$ , e somando:

$$\begin{aligned} [s(2s) - (s-1)s] \bar{x} &= s(2 + 1/s^2) - (s-1)(1 + 2/s^3) \Rightarrow s(s+1)\bar{x} = s + 1 + \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} \\ \Rightarrow \bar{x}(s) &= \frac{s^4 + s^3 + s^2 - 2s + 2}{s^4(s+1)} \stackrel{\text{frações parciais}}{=} \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{2}{s^4} + \frac{5}{s+1} \\ \Rightarrow x(t) &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} + 5e^{-t} \blacksquare \end{aligned}$$

Nota: Em vez desse procedimento de calcular  $x(t)$  a partir do  $\bar{x}$  oriundo do sistema  $(\star)$ , podemos substituir o já calculado  $y(t)$  na segunda EDO do sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} x' = t^2 - y' = t^2 - (-5 + 4t + 5e^{-t}) &\Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + c_1 \\ x(0) = c_1 + 5 = 1 &\Rightarrow c_1 = -4 \Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} - 4 \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 2:  $\begin{cases} x'' + 10x - 4y = 0 \\ -4x + y'' + 4y = 0 \end{cases}$  sob as condições  $x(0) = y(0) = 0$  e  $x'(0) = -y'(0) = 1$ .

$$\begin{cases} s^2\bar{x} - s\underbrace{x(0)}_0 - \underbrace{x'(0)}_1 + 10\bar{x} - 4\bar{y} = 0 \\ -4\bar{x} + s^2\bar{y} - s\underbrace{y(0)}_0 - \underbrace{y'(0)}_{-1} + 4\bar{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s^2 + 10)\bar{x} - 4\bar{y} = 1 \\ -4\bar{x} + (s^2 + 4)\bar{y} = -1 \end{cases}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{As + B}{s^2 + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12} \Rightarrow A = C = 0, B = -1/5, D = 6/5$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12} \right\} = -\frac{1}{5\sqrt{2}} \text{sent}\sqrt{2} + \frac{6}{5\sqrt{12}} \text{sent}\sqrt{12} \blacksquare$$

$$y(t) = [x''(t) + 10x(t)]/4 = \dots = -\frac{2}{5\sqrt{2}} \text{sent}\sqrt{2} - \frac{3}{5\sqrt{12}} \text{sent}\sqrt{12} \blacksquare$$

## 4.17 Exercícios

Calcule  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  ou  $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ , pelo modo solicitado se algum for indicado:

1.  $f(t) = t^2 \operatorname{sen} 3t$

2.  $f(t) = \cos 3t \operatorname{senh} 8t$

3.  $f(t) = t e^t \operatorname{senh} 2t$

4.  $f(t) = t e^{-3t} \cos 6t$

5.  $f(t) = t^5 \cosh 3t$

6.  $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$

7.  $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$

8.  $f(t) = \begin{cases} -1 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (t \geq 1) \end{cases}$

9.  $f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 2) \\ 5 & (2 \leq t < 4) \\ -3 & (4 \leq t < 6) \\ 0 & (t \geq 6) \end{cases}$

10.  $\bar{f}(s) = \frac{7s}{4s^2 - 24s + 61}$

11.  $\bar{f}(s) = \frac{1}{3s(2s - 5)}$

12.  $\bar{f}(s) = \ln \frac{s - 3}{s + 1}$

13.  $\bar{f}(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}$

14.  $\bar{f}(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4}$

15.  $\bar{f}(s) = \frac{e^{-3s}}{s} + \operatorname{arccot} \frac{4}{s}$

16.  $f(t) = \begin{cases} t - 1 & (0 \leq t < 2) \\ 0 & (t \geq 2) \end{cases}$

17.  $f(t) = \begin{cases} t^2 & (0 \leq t < 2) \\ -1 + t & (t \geq 2) \end{cases}$

18.  $f(t) = \mathcal{U}(t - a) \operatorname{sen} t$

19.  $\bar{f}(s) = \frac{e^{-5s}}{s - 2}$

20.  $\bar{f}(s) = \frac{e^{-5s}}{(s - 2)^4}$

21.  $\bar{f}(s) = \frac{s + \pi}{s^2 + \pi^2} e^{-s}$

22.  $f(t) = t^3 e^{2t} \mathcal{U}(t - 5)$

23.  $f(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du$

24.  $f(t) = \int_0^t \frac{e^{au} - e^{bu}}{u} du$

25.  $f(t) = f(t+2) \forall t > 0$  e  $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1) \\ -1 & (1 \leq t < 2) \end{cases}$

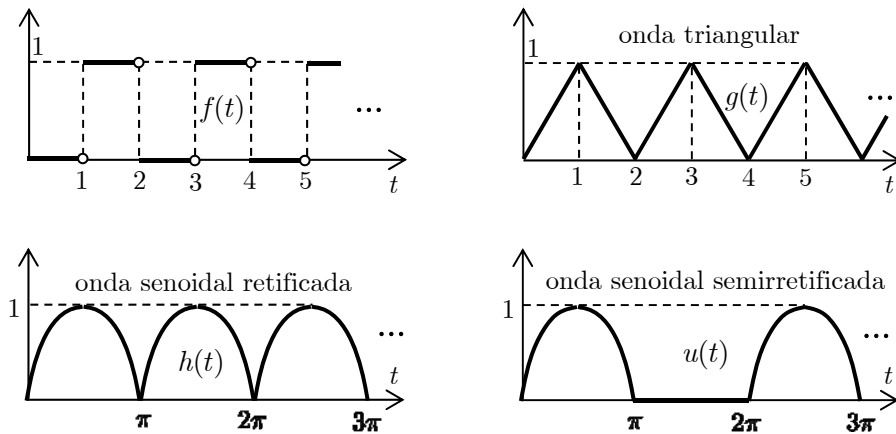
26.  $f(t) = f(t+2) \forall t > 0$  e  $f(t) = t \quad (0 \leq t < 2)$

27. as funções periódicas  $f(t), g(t), h(t)$  e  $u(t)$  definidas pelos gráficos na figura abaixo.

28. a função  $\bar{f}(s)$  do exemplo (vii) da seção 4.6, pelo teorema da convolução

29.  $\bar{f}(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$ , pelo teorema da convolução

30.  $\bar{f}(s) = \frac{1}{(s^2 + 4s + 5)^2}$ , pelo teorema da convolução



Exercícios sobre o uso da transformada de Laplace no cálculo de integrais:

31. Calcule  $\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sen t}{t} dt$ .

32. Calcule  $\int_0^\infty e^{-2t} t^9 dt$ .

Resolva por meio da transformada de Laplace:

33.  $y'' + 2y' + y = f(t) \equiv \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (1 \leq t < 2) \\ -1 & (2 \leq t < 3) \\ 0 & (t \geq 3) \end{cases}$  sob as condições  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ .

34.  $y'' + 3y' - 4y(t) = 0$  sob as condições:

a)  $y(0) = y'(0) = 1$       b)  $y(0) = 1, \quad y'(1) = -4e^{-4}$

c)  $y(1) = e + e^{-4}, \quad y'(1) = e - 4e^{-4}$

35.  $y'(t) + \int_0^t y(u) du = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (t \geq 1) \end{cases}$  sob a condição  $y(0) = 0$ .

36. Resolva pelo método da transformada de Laplace:

(a)  $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$       (b)  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 4x + \frac{d^3y}{dt^3} = 6 \sen t \\ \frac{dx}{dt} + 2x - 2\frac{d^3y}{dt^3} = 0 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$       (c)  $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 5 \end{cases}$

## 4.18 Soluções dos Exercícios

### Prob. 1

$$f(t) = t^2 \sin 3t \Rightarrow \bar{f}(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{3}{s^2 + 9} \right) = \dots$$

### Prob. 2

$$f(t) = \sinh 8t \cos 3t = \frac{e^{8t} - e^{-8t}}{2} \cdot \underbrace{\cos 3t}_{\downarrow \mathcal{L} \atop \frac{s}{s^2+9}} \Rightarrow \bar{f}(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{s-8}{(s-8)^2+9} - \frac{s+8}{(s+8)^2+9} \right]$$

### Prob. 3

$$f(t) = te^t \underbrace{\sinh 2t}_{\downarrow \mathcal{L} \atop \frac{2}{s^2-4}} \Rightarrow \bar{f}(s) = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{2}{(s-1)^2-4} \right] = \dots$$

$$\text{ou } f(t) = te^t \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \frac{1}{2} (e^{3t} - e^{-t}) \underbrace{t}_{\downarrow \mathcal{L} \atop 1/s^2} \Rightarrow \bar{f}(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(s-3)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right]$$

### Prob. 4

$$\mathcal{L}\{te^{-3t} \underbrace{\cos 6t}_{\downarrow \mathcal{L} \atop \frac{s}{s^2+36}}\} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{(s+3)^2+36} \right] = \dots$$

### Prob. 5

$$\mathcal{L}\{t^5 \cosh 3t\} = \mathcal{L}\left\{t^5 \left( \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} \right)\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{3t} t^5\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-3t} t^5\} = \frac{5!}{2(s-3)^6} + \frac{5!}{2(s+3)^6}$$

### Prob. 6

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} &= \int_s^\infty \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{s'+1} \right) ds' = \left[ \ln s' - \ln(s'+1) \right]_s^\infty \\ &= \ln \frac{s'}{s'+1} \Big|_s^\infty = \ln \left( \underbrace{\lim_{s' \rightarrow \infty} \frac{s'}{s'+1}}_{=1} \right) - \ln \frac{s}{s+1} = \ln \frac{s+1}{s} \end{aligned}$$

### Prob. 7

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\} &= \int_s^\infty \left( \frac{1}{s'} - \frac{s'}{s'^2+1} \right) ds' = \left[ \ln s' - \frac{1}{2} \ln(s'^2+1) \right]_s^\infty = \ln \frac{s'}{\sqrt{s'^2+1}} \Big|_s^\infty \\ &= \ln \left( \underbrace{\lim_{s' \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s'^2}}}}_{=1} \right) - \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s} \end{aligned}$$

### Prob. 8

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (t \geq 1) \end{cases} = -1 + 2\mathcal{U}(t-1) \Rightarrow \bar{f}(s) = -\frac{1}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s},$$

ou, sem usar a função degrau,

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} (-1) dt + \int_1^\infty e^{-st} (1) dt = \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^1 - \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^\infty \\ &= \frac{e^{-s} - 1}{s} - \frac{\overset{0}{e^{-s\infty}} - e^{-s}}{s} = -\frac{1}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

### Prob. 9

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 2) \\ 5 & (2 \leq t < 4) \\ -3 & (4 \leq t < 6) \\ 0 & (t \geq 6) \end{cases} = 5\mathcal{U}(t-2) - 8\mathcal{U}(t-4) + 3\mathcal{U}(t-6) \Rightarrow \bar{f}(s) = 5\frac{e^{-2s}}{s} - 8\frac{e^{-4s}}{s} + 3\frac{e^{-6s}}{s}$$



**Prob. 10**

$$\bar{f}(s) = \frac{7s}{4s^2 - 24s + 61} = \frac{7}{4} \left[ \frac{s}{(s-3)^2 + (5/2)^2} \right] = \frac{7}{4} \left[ \frac{s-3}{(s-3)^2 + (5/2)^2} + \frac{6}{5} \cdot \frac{5/2}{(s-3)^2 + (5/2)^2} \right]$$

$$\therefore f(t) = \frac{7}{4} e^{3t} \left[ \cos \frac{5t}{2} + \frac{6}{5} \operatorname{sen} \frac{5t}{2} \right]$$

**Prob. 11**

$$\text{1º modo: } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{3s(2s-5)} \right\} = \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/(s-5/2)}{s} \right\} = \frac{1}{6} \int_0^t e^{5u/2} du = \frac{1}{15} (e^{5t/2} - 1)$$

$$\text{2º modo: } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{3s(2s-5)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1/5}{3s} + \frac{2/15}{2s-5} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1/15}{s} + \frac{1/15}{s-5/2} \right\} = \frac{-1}{15} + \frac{1}{15} e^{5t/2}$$

$$\text{3º modo: } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{3s(2s-5)} \right\} = \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-5/2} \right\} = \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-5/2} \right\} = \frac{1}{6} \cdot 1 * e^{5t/2}$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^t e^{5u/2} du = \frac{1}{15} (e^{5t/2} - 1)$$

**Prob. 12**

$$\bar{f}(s) = \ln \frac{s-3}{s+1} = \ln(s-3) - \ln(s+1) \Rightarrow \bar{f}'(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t f(t) = e^{3t} - e^{-t} \Rightarrow f(t) = -\frac{e^{3t} - e^{-t}}{t}$$

**Prob. 13**

$$\bar{f}(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2} \Rightarrow \bar{f}'(s) = -\frac{1/2}{1 + (s/2)^2} = -\frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t f(t) = -\operatorname{sen} 2t \Rightarrow f(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$$

**Prob. 14**

$$\bar{f}(s) = \ln \frac{s^2+1}{s^2+4} = \ln(s^2+1) - \ln(s^2+4) \Rightarrow \bar{f}'(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t f(t) = 2 \cos t - 2 \cos 2t \Rightarrow f(t) = \frac{2}{t} (\cos 2t - \cos t)$$

**Prob. 15**

$$f(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3s}}{s} \right\}}_{\mathcal{U}(t-3)} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \overbrace{\operatorname{arccot} \frac{4}{s}}^{\bar{g}(s)} \right\}}_{g(t)} = \mathcal{U}(t-3) - \frac{\operatorname{sen} 4t}{t},$$

$$\text{pois } \bar{g}'(s) = -\frac{-4/s^2}{1 + (4/s)^2} = \frac{4}{s^2 + 16} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t g(t) = \operatorname{sen} 4t \Rightarrow g(t) = -\frac{\operatorname{sen} 4t}{t}.$$

**Prob. 16**

$$f(t) = \begin{cases} t-1 & (0 \leq t < 2) \\ 0 & (t \geq 2) \end{cases} = t-1 - \underbrace{(t-1)\mathcal{U}(t-2)}_{p(t-2)} \Rightarrow \bar{f}(s) = \mathcal{L}\{t-1\} - \bar{p}(s) e^{-2s}.$$

$$p(t-2) = t-1 \Rightarrow p(t) = t+2-1 = t+1 \Rightarrow \bar{p}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

$$\therefore \bar{f}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} - \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) e^{-2s} \blacksquare$$

**Prob. 17**

$$f(t) = t^2 + \underbrace{(-1+t-t^2)}_{\equiv p(t-2)} \mathcal{U}(t-2) = t^2 + p(t-2)\mathcal{U}(t-2).$$

$$P(t-2) = -1+t-t^2 \Rightarrow p(t) = -1+(t+2)-(t+2)^2 = -3-3t-t^2.$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{p(t-2)\mathcal{U}(t-2)\} = \frac{2}{s^3} + \bar{p}(s) e^{-2s} = \frac{2}{s^3} + \left( -\frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) e^{-2s} \blacksquare$$

**Prob. 18**

$$f(t) = \mathcal{U}(t-a) \underbrace{\text{sen } t}_{q(t-a)} = \mathcal{U}(t-a) q(t-a) \Rightarrow \bar{f}(s) = e^{-as} \bar{q}(s) . \quad (\text{I})$$

$$q(t-a) = \text{sen } t \Rightarrow q(t) = \text{sen}(t+a) = \text{sen } a \cos t + \cos a \text{sen } t .$$

$$\bar{q}(s) = (\text{sen } a) \frac{s}{s^2+1} + (\cos a) \frac{1}{s^2+1} = \frac{s \text{sen } a + \cos a}{s^2+1} . \quad (\text{II})$$

Com (II) em (I), obtemos a resposta:  $\bar{f}(s) = \frac{e^{-as}}{s^2+1} (s \text{sen } a + \cos a)$

**Prob. 19**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s} \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ e^{2t}}} \right\} = \mathcal{U}(t-5) e^{2(t-5)}$$

**Prob. 20**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s} \underbrace{\frac{1}{(s-2)^4}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ e^{2t} t^3/3!}} \right\} = \mathcal{U}(t-5) e^{2(t-5)} \frac{(t-5)^3}{6}$$

**Prob. 21**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{s+\pi}{s^2+\pi^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \left[ \underbrace{\frac{s}{s^2+\pi^2}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ \cos \pi t}} + \underbrace{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ \text{sen } \pi t}} \right] \right\} \\ &= \mathcal{U}(t-1) \left[ \underbrace{\cos \pi(t-1)}_{-\cos \pi t} + \underbrace{\text{sen } \pi(t-1)}_{-\text{sen } \pi t} \right] = -(\cos \pi t + \text{sen } \pi t) \mathcal{U}(t-1) \end{aligned}$$

**Prob. 22**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \underbrace{t^3}_{p(t-5)} e^{2t} \mathcal{U}(t-5) \right\} = \mathcal{L}\{e^{2t} p(t-5) \mathcal{U}(t-5)\} = \left[ \bar{p}(s') e^{-5s'} \right]_{s'=s-2} = \bar{p}(s-2) e^{-5(s-2)} .$$

Por outro lado,  $p(t) = (t+5)^3 = t^3 + 15t^2 + 75t + 125 \Rightarrow \bar{p}(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{30}{s^3} + \frac{75}{s^2} + \frac{125}{s} .$

Logo,  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[ \frac{6}{(s-2)^4} + \frac{30}{(s-2)^3} + \frac{75}{(s-2)^2} + \frac{125}{s-2} \right] e^{-5(s-2)} .$

**Prob. 23**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t \frac{\text{sen } u}{u} du \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{ \frac{\text{sen } t}{t} \right\} = \frac{1}{s} \int_s^\infty \frac{1}{s'^2+1} ds' = \frac{1}{s} \arctan s' \Big|_s^\infty = \frac{1}{s} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan s \right)$$

**Prob. 24**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{ \int_0^t \frac{e^{au} - e^{bu}}{u} du \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} \right\} = \frac{1}{s} \int_s^\infty \left( \frac{1}{s'-a} - \frac{1}{s'-b} \right) ds' = \frac{1}{s} \left[ \ln \frac{s'-a}{s'-b} \right]_s^\infty \\ &= \frac{1}{s} \left[ \ln 1 - \ln \frac{s-a}{s-b} \right] = \frac{1}{s} \ln \frac{s-b}{s-a} \end{aligned}$$

**Prob. 25**

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \frac{\int_0^1 e^{-st}(1) dt + \int_1^2 e^{-st}(-1) dt}{1-e^{-2s}} = \frac{-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^1 + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=1}^2}{1-e^{-2s}} \\ &= \frac{(-e^{-s} + 1 + e^{-2s} - e^{-s})}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1+e^{-s})(1-e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} . \end{aligned}$$

**Prob. 26**

$$\bar{f}(s) = \frac{\int_0^2 e^{-st} t dt}{1-e^{-2s}} = \frac{-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^2 + \frac{1}{s} \int_0^2 e^{-st} dt}{1-e^{-2s}} = \frac{-\frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_{t=0}^2}{1-e^{-2s}} = \frac{1-(1+2s)e^{-2s}}{1-e^{-2s}} .$$

**Prob. 27**

- $\bar{f}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_1^2 e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=1}^2$   
 $= -\frac{e^{-2s} - e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{e^{-s} \cancel{(1-e^{-s})}}{s(1+e^{-s}) \cancel{(1-e^{-s})}} = \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}.$
- $g(t) = g(t+2)$  e  $g(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ 2-t & (1 \leq t < 2) \end{cases} \Rightarrow \bar{g}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} g(t) dt$   
 $\Rightarrow \bar{g}(s) = \frac{\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2-t) dt}{1-e^{-2s}} = \dots = \frac{1-2e^{-s}(1+s)-e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}.$
- $\bar{h}(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} h(t) dt = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} \text{sen } t dt = \dots = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \cdot \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$
- $\bar{u}(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} u(t) dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} \text{sen } t dt = \dots = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$

**Prob. 28**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-5)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = e^{2t} * e^{5t} = \int_0^t e^{2u} e^{5(t-u)} du = e^{5t} \int_0^t e^{-3u} du \\ &= e^{5t} \frac{e^{-3t}}{-3} \Big|_0^t = e^{5t} \frac{e^{-3t} - 1}{-3} = -\frac{e^{2t} - e^{5t}}{3} \end{aligned}$$

**Prob. 29**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \text{sen } t * \text{sen } t = \int_0^t \text{sen}(t-u) \text{sen } u du \\ &= \int_0^t [\text{sen } t \cos u - \text{sen } u \cos t] \text{sen } u du = (\text{sen } t) \int_0^t \text{sen } u \cos u du - (\cos t) \int_0^t \text{sen}^2 u du \\ &= (\text{sen } t) \left[ \frac{\text{sen}^2 u}{2} \right]_0^t - (\cos t) \left[ \frac{u}{2} - \frac{\text{sen } 2u}{4} \right]_0^t = \frac{1}{2} \text{sen}^3 t - \left( \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2t}{4} \right) \cos t \end{aligned}$$

**Prob. 30**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4s+5)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+2)^2+1]^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} \\ &= (e^{-2t} \text{sen } t) * (e^{-2t} \text{sen } t) = \int_0^t e^{-2u} \text{sen } u e^{-2(t-u)} \text{sen}(t-u) du \\ &= e^{-2t} \underbrace{\int_0^t \text{sen } u \text{sen}(t-u) du}_{\text{já calculada no Prob. 29}} = e^{-2t} \left[ \frac{1}{2} \text{sen}^3 t - \left( \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2t}{4} \right) \cos t \right] \end{aligned}$$

**Prob. 31**

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} \text{sen } t}{t} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen } t}{t}\right\} \Big|_{s=1} = \int_s^\infty \frac{1}{s'^2+1} ds' \Big|_{s=1} = \arctan s' \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

**Prob. 32**

$$\int_0^\infty e^{-2t} t^9 dt = \int_0^\infty e^{-st} t^9 dt \Big|_{s=2} = \mathcal{L}\{t^9\} \Big|_{s=2} = \frac{9!}{s^{10}} \Big|_{s=2} = \frac{9!}{2^{10}}$$

**Prob. 33**

$$y'' + 2y' + y = f(t) \equiv \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (1 \leq t < 2) \\ -1 & (2 \leq t < 3) \\ 0 & (t \geq 3) \end{cases} \quad \text{sob as condições } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 0 :$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' + 2y' + y\} &= \mathcal{L}\left\{\overbrace{\mathcal{U}(t-1) - 2\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)}^{f(t)}\right\} \\
\Rightarrow s^2 \bar{y}(s) - s \underbrace{y(0)}_0 - \underbrace{y'(0)}_0 + 2[s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_0] + \bar{y}(s) &= (s+1)^2 \bar{y}(s) = \frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} \\
\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{e^{-3s}}{s(s+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}\bar{g}(s) - 2e^{-2s}\bar{g}(s) + e^{-3s}\bar{g}(s)\},
\end{aligned}$$

onde

$$\bar{g}(s) \equiv \frac{1}{s(s+1)^2} \stackrel{\text{frações parciais}}{=} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow g(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

$$\therefore y(t) = \mathcal{U}(t-1)g(t-1) - 2\mathcal{U}(t-2)g(t-2) + \mathcal{U}(t-3)g(t-3),$$

$$\begin{aligned}
\text{ou } y(t) &= \mathcal{U}(t-1) \left[1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}\right] \\
&\quad - 2\mathcal{U}(t-2) \left[1 - e^{-(t-2)} - (t-2)e^{-(t-2)}\right] \\
&\quad + \mathcal{U}(t-3) \left[1 - e^{-(t-3)} - (t-3)e^{-(t-3)}\right].
\end{aligned}$$

**Prob. 34**

$$\begin{aligned}
y'' + 3y' - 4y(t) = 0 &\stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} s^2 \bar{y}(s) - sy(0) - y'(0) + 3[s\bar{y}(s) - y(0)] - 4\bar{y}(s) = 0 \\
\Rightarrow \underbrace{(s^2 + 3s - 4)}_{(s-1)(s+4)} \bar{y}(s) = y(0)s + 3y(0) + y'(0) &\Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{y(0)s + 3y(0) + y'(0)}{(s-1)(s+4)} \quad \langle 1 \rangle
\end{aligned}$$

Item (a): Substituindo  $y(0) = y'(0) = 1$  na equação  $\langle 1 \rangle$ , obtemos

$$y(s) = \frac{s+4}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{s-1} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = e^t.$$

Item (b):  $y(0) = 1$ ,  $y'(1) = -4e^{-4}$ . A equação  $\langle 1 \rangle$  com  $y(0) = 1$  fornece

$$y(s) = \frac{s+3+y'(0)}{(s-1)(s+4)} = \frac{\overbrace{\left[\frac{y'(0)+4}{5}\right]}^{c_1}}{s-1} + \frac{\overbrace{\left[\frac{y'(0)-1}{-5}\right]}^{1-c_1}}{s+4} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{1-c_1}{s+4} \Rightarrow y(t) = c_1 e^t + (1-c_1)e^{-4t}.$$

Acima, mudamos da constante arbitrária  $y'(0)$  para a constante  $c_1$ , também arbitrária, pois a determinação de  $c_1$  envolve menos contas que a de  $y'(0)$ . Agora usamos a outra condição,  $y'(1) = -4e^{-4}$ , para determinar  $c_1$ :

$$\begin{aligned}
y'(t) = c_1 e^t - 4(1-c_1)e^{-4t} &\Rightarrow y'(1) = c_1 e - 4(1-c_1)e^{-4} = -4e^{-4} \\
\Rightarrow c_1(e + 4e^{-4}) = 0 &\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(t) = e^{-4t}.
\end{aligned}$$

Item (c):  $y(1) = e + e^{-4}$ ,  $y'(1) = e - 4e^{-4}$

$$y(s) = \frac{y(0)s + 3y(0) + y'(0)}{(s-1)(s+4)} = \frac{\overbrace{\left[\frac{4y(0) + y'(0)}{5}\right]}^{c_1}}{s-1} + \frac{\overbrace{\left[\frac{-y(0) + y'(0)}{-5}\right]}^{c_2}}{s+4} \Rightarrow y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}.$$

Aqui também mudamos das constantes arbitrárias  $y(0)$  e  $y'(0)$  para as constantes arbitrárias  $c_1$  e  $c_2$ , assim simplificando as contas. Usando as duas condições iniciais, obtemos um sistema algébrico com as incógnitas  $c_1$  e  $c_2$ ; resolvendo-o, acabamos a resolução:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 e + c_2 e^{-4} = e + e^{-4} \\ y'(1) = c_1 e - 4c_2 e^{-4} = e - 4e^{-4} \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1 \Rightarrow y(t) = e^t + e^{-4t}.$$

**Prob. 35**

$$y' + \int_0^t y(u) du = \mathcal{U}(t-1) \xrightarrow{\mathcal{L}} s\bar{y}(s) + \frac{\bar{y}(s)}{s} = \frac{e^{-s}}{s} \Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1} \Rightarrow y(t) = \mathcal{U}(t-1) \operatorname{sen}(t-1) .$$

**Prob. 36**

$$\text{Respostas: (a) } \begin{cases} x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\ y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{(b) } \begin{cases} x = 8 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{t^4}{4!} \\ y = -\frac{2}{3!}t^3 + \frac{t^4}{4!} \end{cases}$$

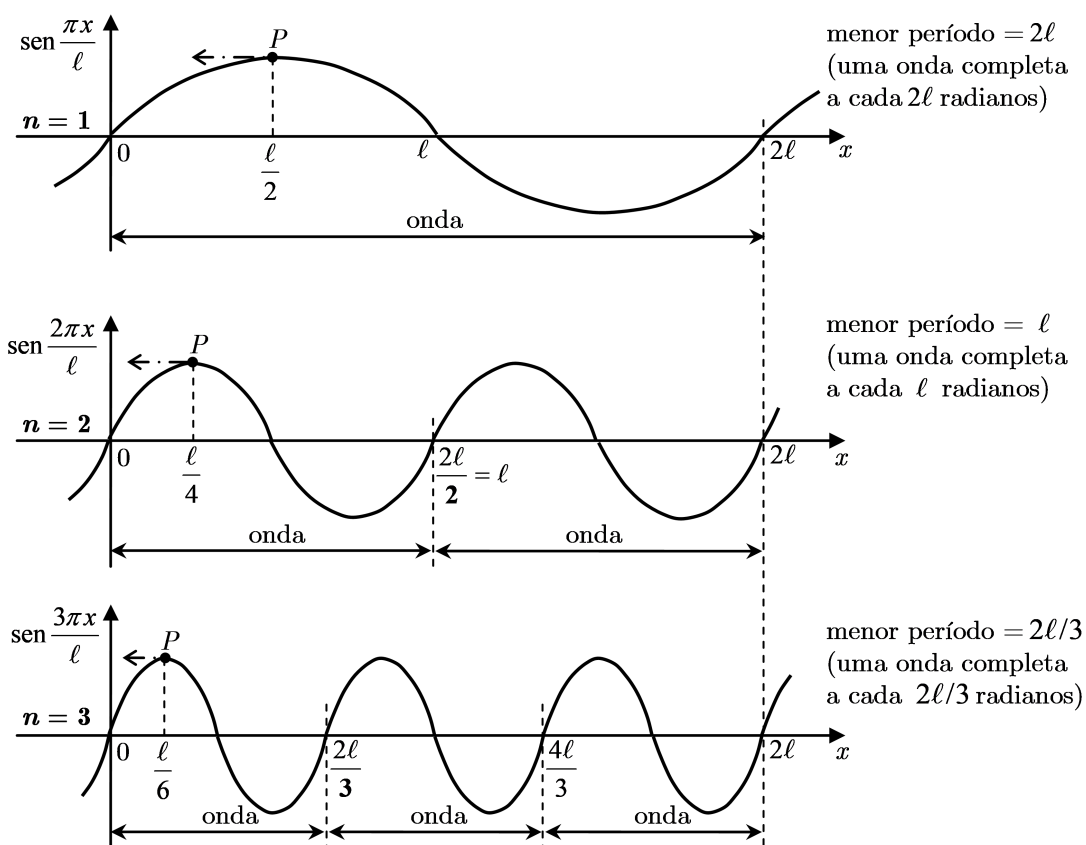
## Capítulo 5

# Séries de Fourier

{Ref. [14], seções 11.1 a 11.3}

### 5.1 Construção da Série de Fourier

#### 5.1.1 Série de Fourier de Função Periódica



Na figura acima vemos alguns gráficos das funções trigonométricas  $\sin(n\pi x/\ell)$  [ $n = 1, 2, 3 \dots$ ]. Os gráficos de  $\cos(n\pi x/\ell)$  são os de  $\sin(n\pi x/\ell)$  transladados de  $(2\ell/n)/4 = \ell/2n$  para a esquerda (de modo que o ponto  $P$  de cada figura fique em  $x = 0$ ), pois  $\cos n\pi x/\ell = \sin[n\pi(x + \ell/2n)/\ell]$ . É fácil mostrar que, para  $m$  e  $n$  inteiros, essas funções satisfazem as chamadas *relações de ortonormalidade*<sup>(\*)</sup>:

$$\int_0^{2\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0 ; \quad (5.1a)$$

$$\underbrace{\int_0^{2\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\downarrow \text{ se } m = n \neq 0} = \underbrace{\int_0^{2\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\downarrow \text{ se } m = n} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \ell & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} . \quad (5.1b)$$

$$\int_0^{2\ell} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \ell \quad \int_0^{2\ell} \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} \ell & \text{se } n \neq 0 \\ 2\ell & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Considere a série infinita

$$S_F(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} . \quad (5.2)$$

Como ela é periódica, de período  $2\ell$  ( $\ell$  é indeterminado por enquanto), isto é,

$$S_F(x + 2\ell) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi(x + 2\ell)}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi(x + 2\ell)}{\ell} = S_F(x) ,$$

é válida a tentativa de usá-la para aproximar uma função  $f(x)$  também periódica, de período  $p$ :

$$f(x) \sim S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin \frac{m\pi x}{\ell} . \quad (5.3)$$

O primeiro passo é igualar os períodos,  $2\ell = p$ , assim determinando  $\ell = p/2$ . Não usaremos mais o parâmetro  $p$ , pois o que passa a importar é que o parâmetro  $\ell$  em (5.2) deve ser o semiperíodo da função  $f(x)$  que se deseja aproximar por  $S_F(x)$ .

Para determinar os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , usamos (5.1a) e (5.1b). Calculemos  $b_n$  ( $n = 1, 2 \dots$ ) multiplicando ambos os lados de (5.3) por  $\sin(n\pi x/\ell)$  e depois integrando no intervalo  $(-\ell, \ell)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^{2\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_0^{2\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}_0 \\ &\quad + b_m \underbrace{\int_0^{2\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \ell & \text{se } m = n \end{cases}} = b_n \ell . \end{aligned}$$

Multiplicando agora ambos os lados daquela equação por  $\cos(n\pi x/\ell)$  e integrando em  $(0, 2\ell)$ , obtemos  $a_n$  ( $n = 1, 2 \dots$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^{2\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ 2\ell & \text{se } n = 0 \end{cases}} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_0^{2\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \ell & \text{se } m = n \end{cases}} \\ &\quad + b_m \underbrace{\int_0^{2\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_0 = \begin{cases} a_n \ell & \text{se } n \neq 0 \\ a_0 \ell & \text{se } n = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

---

(\*) expressando tanto ortogonalidade quanto normalização

Em resumo, se  $f(x)$  tem período  $2\ell$ , então,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , temos que

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = S_F(x) , \quad (5.4a)$$

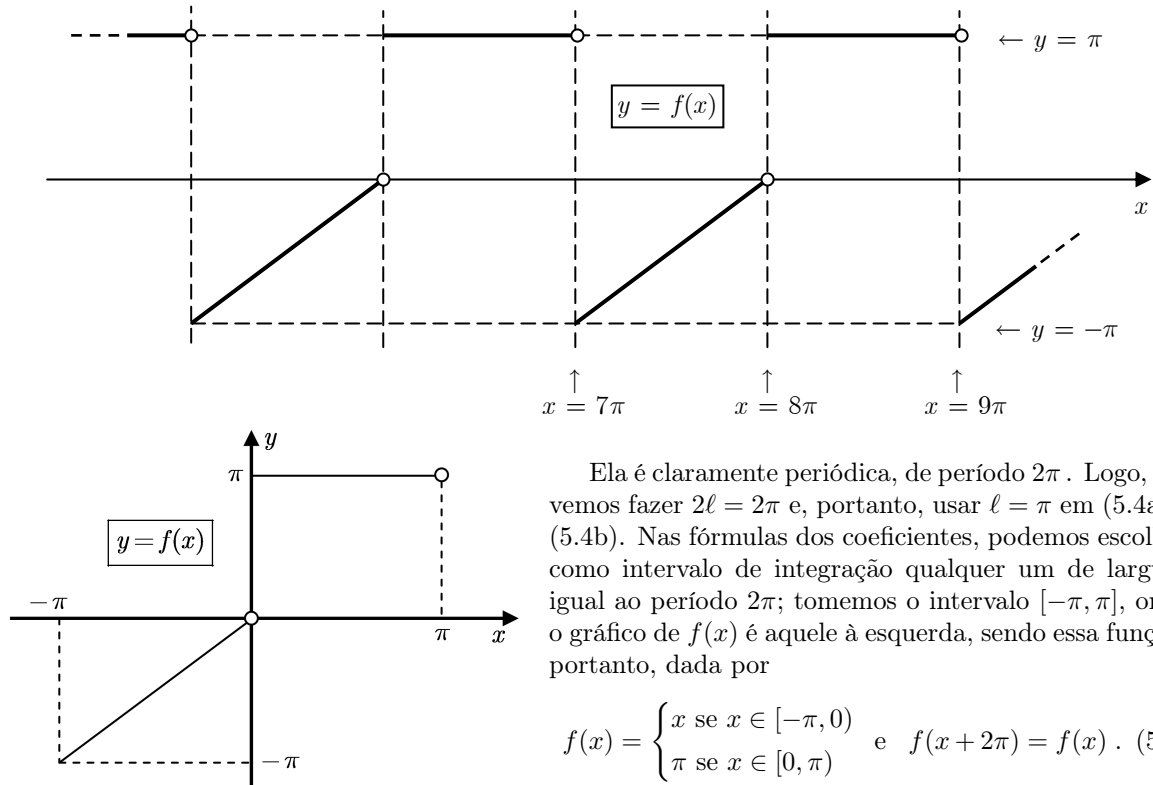
onde

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) dx , \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx , \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx . \quad (5.4b)$$

Nessas integrais, o intervalo de integração pode ser qualquer um de largura igual ao período  $2\ell$  — isto é, podemos, acima, fazer a substituição  $\int_0^{2\ell} dx \rightarrow \int_c^{c+2\ell} dx$  (com qualquer  $c \in \mathbb{R}$ ) —, pois as funções que figuram nos integrandos  $[f(x), \cos(n\pi x)/\ell]$  e  $\sin(n\pi x)/\ell]$  têm período  $2\ell$ .

A expansão da função  $f(x)$  dada por (5.4a) e (5.4b) foi obtida formalmente, sem cogitar da validade das operações realizadas na sua dedução<sup>(\*)</sup>. Mais adiante enunciaremos um teorema estabelecendo sob que condições uma função admite esse tipo de expansão. Neste caso, (5.4a) e (5.4b) constituem a chamada *série (desenvolvimento, ou expansão) de Fourier* de  $f(x)$ . O sinal " $\sim$ " indica que  $S_F(x)$  é uma aproximação de  $f(x)$ ; é substituído pelo sinal de igualdade no caso de a série  $S_F(x)$  convergir para  $f(x)$  em todo  $x$ . Observe que a fórmula de  $a_0$  é a de  $a_n|_{n=0}$  com  $n = 0$ , sendo esta unificação de fórmulas o motivo de pôr  $a_0/2$  como o primeiro termo da série em (5.2).

Como **exemplo de série de Fourier de função periódica**, considere a função dada pelo gráfico abaixo.



Ela é claramente periódica, de período  $2\pi$ . Logo, devemos fazer  $2\ell = 2\pi$  e, portanto, usar  $\ell = \pi$  em (5.4a) e (5.4b). Nas fórmulas dos coeficientes, podemos escolher como intervalo de integração qualquer um de largura igual ao período  $2\pi$ ; tomemos o intervalo  $[-\pi, \pi]$ , onde o gráfico de  $f(x)$  é aquele à esquerda, sendo essa função, portanto, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \pi & \text{se } x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x+2\pi) = f(x) . \quad (5.5)$$

Logo,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi dx = \frac{\pi}{2} .$$

<sup>(\*)</sup>em particular, admitimos que, ao integrar a série, a integral da soma da infinidade de termos que a compõem é igual à soma das integrais de cada termo



$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \pi \cos nx \, dx}_0 \\
&\stackrel{\text{p.p.}}{=} \frac{1}{\pi} \left[ \underbrace{\left. \frac{x \sin nx}{n} \right|_{-\pi}^0}_{0} - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin nx}{n} \, dx \right] = \frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi n^2} \\
&= \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} = \begin{cases} 2/(\pi n^2) & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin nx \, dx \\
&\stackrel{\text{p.p.}}{=} \frac{1}{\pi} \left[ \left. \frac{x(-\cos nx)}{n} \right|_{-\pi}^0 - \underbrace{\int_{-\pi}^0 \frac{-\cos nx}{n} \, dx}_0 \right] + \left. \frac{-\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\pi(-1)^n}{n} \right] + \frac{-(-1)^n + 1}{n} = \frac{1 - 2(-1)^n}{n} = \begin{cases} 3/n & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ -1/n & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases},
\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula  $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$ . A série de Fourier de  $f(x)$  é, portanto,

$$S_F(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{2}{\pi n^2} \cos nx + \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{3}{n} \sin nx + \sum_{n=2,4,6\dots} \frac{-1}{n} \sin nx \quad \blacksquare \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Série de Fourier de Função Não Periódica

Mostraremos que uma função não periódica  $g(x)$  também pode ser desenvolvida na série  $S_F(x)$  (periódica) em (5.2), mas apenas num intervalo finito  $[a, b]$  do seu domínio, denominado *intervalo de expansão*, contanto que  $2\ell = b - a$  e as integrais que fornecem os coeficientes sejam efetuadas no intervalo  $[a, b]$ :

Série de Fourier de uma função não periódica  $g(x)$  num intervalo finito  $[a, b]$  do seu domínio:

$$g(x) \sim S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{para } x \in [a, b], \quad \text{com } 2\ell = b - a, \quad (5.7a)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_a^b g(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_a^b g(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_a^b g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (5.7b)$$

Note que o primeiro termo dessa série, o termo constante  $a_0/2$ , é igual ao valor médio da função no intervalo de expansão:

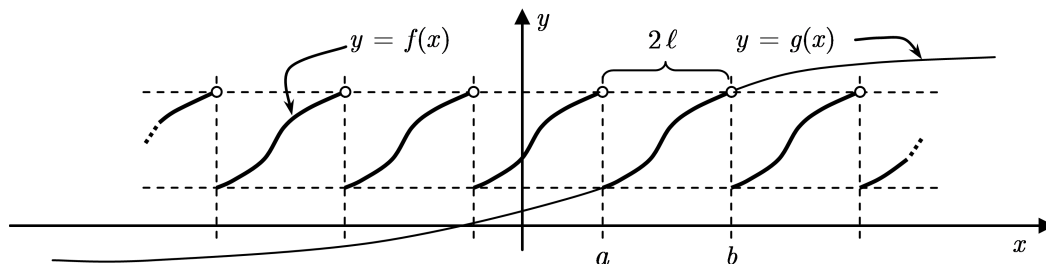
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.8)$$

Nota: Neste ponto da exposição cabe fazer a seguinte observação: Até o momento estamos sempre nos referindo à expansão de Fourier de uma função num intervalo fechado  $[a, b]$ , mas depreende-se da formulação que a série de Fourier é a mesma para qualquer dos intervalos  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  e  $(a, b)$  pelo simples fato de que cada coeficiente da série é resultado de uma integral, e esse resultado não se altera quando a integral sofre alteração oriunda de modificações num número finito de pontos do intervalo de integração. Isso se tornará mais evidente quando estudarmos a convergência da série de Fourier.

Para mostrar a validade de (5.7), considere a função  $f(x)$  assim definida:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & \text{se } x \in [a, b) \\ f(x + 2\ell) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \text{ onde } 2\ell = b - a. \end{cases}$$

Vê-se que essa função  $f(x)$  é periódica, de período  $2\ell = b - a$ , e coincidente com  $g(x)$  no intervalo  $[a, b]$ ; ela é denominada *extensão periódica de  $g(x)$*  [ou, sem abreviar, a *extensão periódica dos valores de  $g(x)$  no intervalo  $[a, b]$  a todo o eixo real*]. A figura abaixo exemplifica gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$ .



Uma vez que  $f(x)$  é periódica, ela admite a expansão dada por (5.4a) e (5.4b) com  $2\ell = (b - a)$ , no caso. Ora, tal série de Fourier de  $f(x)$ , válida em todo eixo real, vale em particular no intervalo  $[a, b]$ , onde  $f(x) = g(x)$ ; isso justifica (5.7a). Por outro lado, como já dissemos, as integrações nas fórmulas dos coeficientes da série de Fourier de  $f(x)$  podem ser efetuadas em qualquer intervalo de largura  $b - a$ . Se, em particular, empregarmos o intervalo  $[a, b]$ , onde  $f(x) = g(x)$ , tais fórmulas tornam-se aquelas em (5.7b).

Como **exemplo de série de Fourier de função não periódica**, desenvolvamos tal série para a função  $g(x) = x^2$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Usando (5.7a) e (5.7b) com  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$  e, portanto,  $2\ell = (b - a) = 2\pi$ , temos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{2}{\pi} \left\{ \underbrace{\frac{x^2 \sin nx}{n}}_0 \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right\} \\ &\stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{-4}{n\pi} \left\{ \underbrace{\frac{-x \cos nx}{n}}_0 \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right\} = \frac{-4}{\pi n^2} \left\{ -\pi \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + \underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_0 \Big|_0^{\pi} \right\} = \frac{4}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx \stackrel{(\#)}{=} 0.$$

Explicações das passagens marcadas acima:

(\*) função par integrada num intervalo simétrico em relação à origem

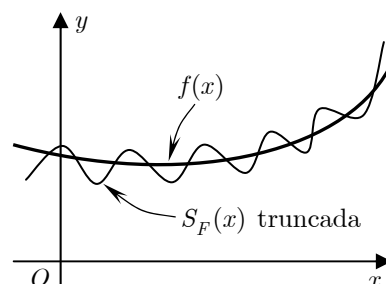
(†) integração por partes

(#) função ímpar integrada num intervalo simétrico em relação à origem

Logo,

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi] \blacksquare$$

Se truncarmos a série de Fourier  $S_F(x)$  de  $f(x)$ , isto é, se a calcularmos com um número finito de termos, o seu gráfico terá um aspecto oscilatório em torno do gráfico de  $f(x)$ , como ilustrado à direita. O aumento do número de termos causa oscilações de menor amplitude na maior parte do intervalo de expansão. Já quando o número de termos da série tende a infinito, ela pode convergir, fornecendo o valor correto da função ou um valor incorreto, ou divergir, dependendo da função. Mais adiante mencionaremos condições que, se uma função satisfizer, garantem a convergência pontual da sua série de Fourier.



## 5.2 Convergência Pontual da Série de Fourier

Seja  $f(x)$  uma função contínua em todos os pontos de um intervalo limitado  $[a, b]$ , exceto possivelmente nos pontos  $a, b$  e num número finito de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ , nos quais ela não é contínua nem necessariamente definida. Assim, ela é contínua em cada um dos intervalos abertos  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$ . Se ela tiver limites laterais finitos em  $x_1, \dots, x_n$ , pela direita de  $a$  e pela esquerda de  $b$ , então essa função é dita *contínua por partes* em  $[a, b]$ .

À direita, na figura superior, a função  $f(x)$  é contínua por partes, com todos tipos de anomalias possíveis (pontos de descontinuidade e de indefinição).

Note que, por essa definição, uma função contínua em  $[a, b]$  é necessariamente contínua por partes nesse intervalo. Mas, em  $(a, b)$ , uma função contínua não é necessariamente limitada e, portanto, não é necessariamente contínua por partes; à direita, a função  $g(x)$  na figura inferior ilustra isso.

Já num *intervalo ilimitado*  $I$ , uma função é dita contínua por partes se ela o for em todo subintervalo de  $I$ .

Se uma função  $f$  e sua derivada  $f'$  são contínuas por partes num intervalo, então  $f$  é dita *suave por partes* nesse intervalo.

No que segue é usada a seguinte notação de limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k^+) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = f(k^-) . \quad (5.9)$$

Segue um teorema e um corolário desse teorema estabelecendo condições para a convergência da série de Fourier (c.f. Ref.[3], seções 10.3; Ref.[5], seções 12,13,15):

**Teorema.** Se uma função periódica  $f$  for suave por partes, então sua série de Fourier  $S_F(x)$  dada por (5.4) convergirá segundo a fórmula

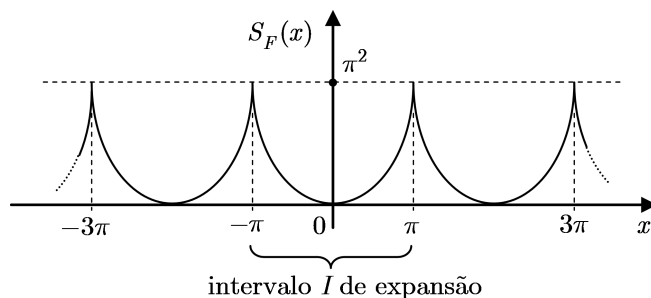
$$S_F(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (5.10)$$

**Corolário.** Se uma função não periódica  $g(x)$  for suave por partes num intervalo finito  $[a, b]$  do seu domínio, então sua série de Fourier  $S_F(x)$  desenvolvida nesse intervalo usando (5.7) convergirá segundo (5.10) se  $x \in (a, b)$  e conforme a fórmula

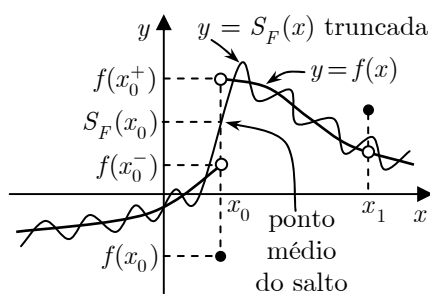
$$S_F(x) = \frac{g(a^+) + g(b^-)}{2} \quad \text{se } x = a \text{ ou } x = b . \quad (5.11)$$

A equação (5.10) informa que  $S_F(x)$  converge para o valor médio dos limites laterais de  $f$  à direita e à esquerda de  $x$ ; em particular, converge para  $f(x)$  onde  $f$  é contínua, pois, neste caso,  $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ . Seguem algumas figuras que ilustram a convergência da série de Fourier.

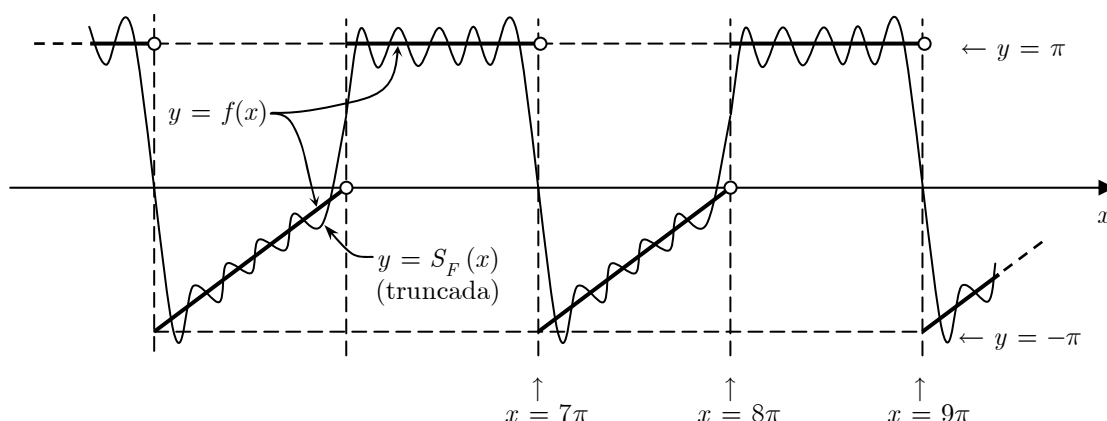
Para a função  $f(x) = x^2$  desenvolvida em série de Fourier no intervalo  $I = [-\pi, \pi]$  no exemplo na pág. 89, o gráfico da série de Fourier  $S_F(x)$  obtida é como mostra a figura abaixo. Nota-se que  $S_F(x)$  converge para  $f(x)$  no intervalo de expansão  $I$ , pois essa função é contínua nesse intervalo, e, fora desse intervalo, fornece a extensão periódica, de período igual à largura  $2\pi$  de  $I$ , dos valores de  $S_F(x) = f(x)$  para  $x \in I$ .



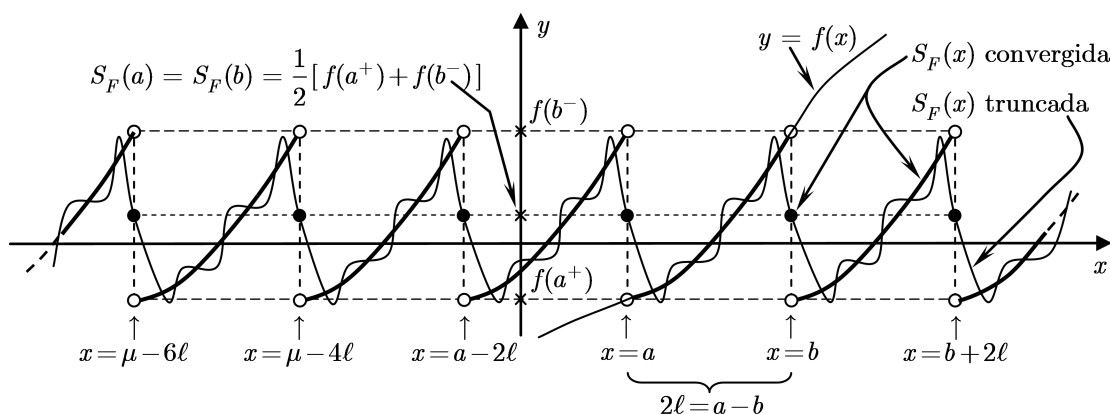
Já a figura à direita mostra as ondulações do gráfico da série de Fourier  $S_F(x)$  truncada de uma função  $f(x)$  que apresenta um salto de descontinuidade no ponto  $x_0$ . Ela exhibe o que se expôs acima sobre a lei de convergência em (5.10): que o gráfico de  $S_F(x)$  passa pelo ponto médio do salto, o que parece ser o mais lógico, e isso é demonstrado independentemente do número de termos da série truncada. Tal figura também ilustra o seguinte: como a série de Fourier é completamente determinada por seus coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , e como esses coeficientes exibem a função  $f(x)$  em integrandos, esses coeficientes não seriam sensíveis a uma mudança no valor de  $f(x)$  em abscissas isoladas, tais como  $x_0$  e  $x_1$  (v. a figura): nestes, o valor da função é irrelevante para a série de Fourier.



A convergência pontual da série de Fourier segundo (5.10) de uma função periódica (aquela do exemplo na pág. 87) também é ilustrada na seguinte figura:



Por fim, abaixo apresentamos mais uma figura mostrando os gráficos de uma função  $f(x)$  e o de sua série de Fourier  $S_F(x)$  (truncada) desenvolvida num intervalo  $[a, b]$ . Como a largura do intervalo de expansão determina o período da série de Fourier, o período de  $S_F(x)$  é  $2\ell = a - b$ . A figura possibilita entender que  $S_F(x)$  – por replicar contigualmente a porção do seu gráfico em  $[a, b]$  a cada intervalo de largura  $2\ell$  – só seria contínua nos extremos de  $[a, b]$  se  $f(a^+) = f(b^-)$ ; sendo diferentes esses dois valores, há um salto de descontinuidade  $f(b^-) - f(a^+)$  nos extremos de cada intervalo replicado, convergindo a série para o ponto médio de cada salto, de acordo com (5.11) (e a periodicidade da série de Fourier).



Convém ressaltar que as condições para a validade das equações (5.10) e (5.11) são *suficientes*, mas não são *necessárias*, pois existem funções que não as satisfazem e, no entanto, convergem segundo as regras estabelecidas por essas equações. Ressalte-se também que tais condições podem ser substituídas por outras que garantem essas mesmas regras de convergência, tais como as *condições de Dirichlet*. Ainda não há um teorema de convergência pontual estabelecendo condições suficientes que também sejam necessárias.

### 5.3 Séries de Fourier em Senos e em Cossenos

Considere a expansão de uma função  $f(x)$  no intervalo  $[-\ell, \ell]$ , obtida usando (5.7):

$$f(x) \sim S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad , \quad x \in [-\ell, \ell] \quad ,$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad .$$

Se  $f(x)$  for par, então

$$b_n = \frac{1}{\ell} \underbrace{\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\text{ímpar}} = 0 \quad ,$$

isto é, todos os coeficientes  $b_n$  de  $\sin(n\pi x/\ell)$  na série se anulam; além disso,

$$a_n = \frac{1}{\ell} \underbrace{\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\text{par}} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad .$$

Ou seja, a série é uma expansão em cossenos apenas, cujos coeficientes  $a_n$  são obtidos com a integração efetuada somente de 0 a  $\ell$  e multiplicando-se o resultado por dois.

Se  $f(x)$  for ímpar, então

$$a_n = \frac{1}{\ell} \underbrace{\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\text{ímpar}} = 0 \quad .$$

Agora são os coeficientes  $a_n$  de  $\cos(n\pi x/\ell)$  que se anulam, sendo a série uma expansão em senos apenas, com seus coeficientes dados por

$$b_n = \frac{1}{\ell} \underbrace{\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\text{par}} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad .$$

Essas expansões são séries de Fourier no intervalo  $[-\ell, \ell]$  válidas para funções com paridade. Mas, observe, as integrais que fornecem os coeficientes são efetuadas no intervalo  $[0, \ell]$ , o que nos permite desenvolver *qualquer*<sup>(\*)</sup> função somente em cossenos ou em senos no intervalo  $[0, \ell]$ . Essa proposição é formulada abaixo e justificada logo depois.

*Qualquer*<sup>(\*)</sup> função  $f(x)$  pode ser expandida somente em cossenos ou somente em senos no intervalo  $[0, \ell]$ :

$$f(x) \sim \begin{cases} S_F^c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} : \text{ série de Fourier de } f(x) \text{ em cossenos} & (5.12a) \\ S_F^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} : \text{ série de Fourier de } f(x) \text{ em senos} \quad , & (5.12b) \end{cases}$$

onde  $x \in [0, \ell]$  e com os coeficientes dados por

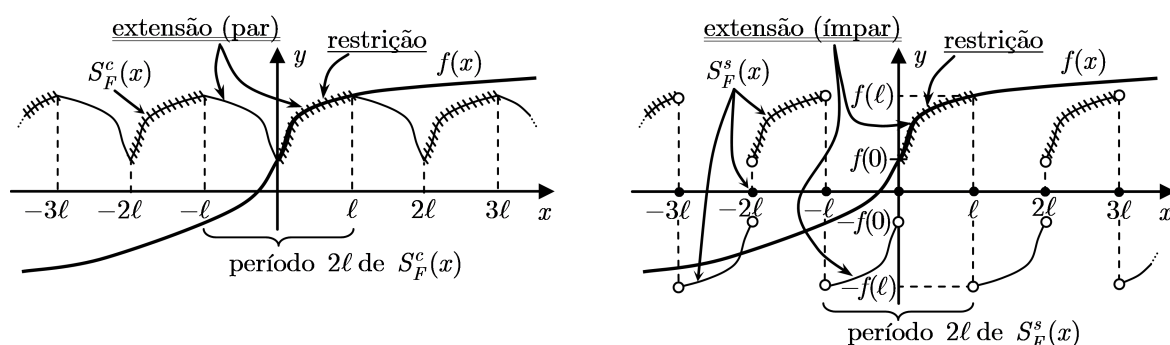
$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad ; \quad (5.13a)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad . \quad (5.13b)$$

<sup>(\*)</sup>A palavra *qualquer* é usada no sentido de que a função pode ser qualquer uma para a qual a série obtida convirja; para isso acontecer é suficiente que estejam satisfeitas as condições do teorema na seção 5.2.

Essa formulação é justificada assim: Na série de Fourier em cossenos de  $f(x)$  tudo se passa como se estivéssemos expandindo em série de Fourier no intervalo  $[-\ell, \ell]$  uma função *par* que coincide com  $f(x)$  no intervalo  $[0, \ell]$ , e, analogamente, na série de Fourier em senos de  $f(x)$ , como se expandíssemos em série de Fourier no intervalo  $[-\ell, \ell]$  uma função *ímpar* que coincide com  $f(x)$  no intervalo  $(0, \ell]$ .

Uma peculiaridade dessas séries: Elas têm período  $2\ell$  e são desenvolvimentos de funções no intervalo  $[0, \ell]$ , o que lhes justifica as denominações *desenvolvimentos de Fourier de meio período* ou *semisséries de Fourier*. Mas, se na metade de cada período, isto é, de cada intervalo periódico  $(-n\ell, n\ell]$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), há a função expandida, o que há na metade inferior desses períodos? Para responder, vejamos os seus gráficos. Para desenhá-los, basta lembrar que essas séries são séries de Fourier de funções pares ou ímpares em  $[-\ell, \ell]$ , de período  $2\ell$ . A figura abaixo mostra o gráfico de uma função  $f(x)$  qualquer e suas séries de Fourier em cossenos e senos,  $S_F^c(x)$  e  $S_F^s(x)$ , respectivamente. O primeiro passo é considerar apenas a restrição de  $f$  ao intervalo  $[0, \ell]$ ; em seguida, para obter  $S_F^c(x)$ , estendemos ao intervalo  $[-\ell, \ell]$  aquela restrição de modo que a extensão de  $f$  ao intervalo  $[-\ell, \ell]$  seja par, e, para obter  $S_F^s(x)$ , de modo que tal extensão seja ímpar; por fim, replicamos o gráfico dessa extensão contiguamente em intervalos de largura  $2\ell$ , seguindo as regras de convergência pontual da série de Fourier em (5.10) e (5.11). Na Figura, os gráficos de  $S_F^c(x)$  e  $S_F^s(x)$  assim obtidos são mostrados com pequenos risco ao longo deles. Então temos a resposta: na outra metade do período de uma semissérie de  $f$  há a extensão par ou ímpar de  $f$ .



## 5.4 Exercícios

- 1] Escreva a série de Fourier de uma função  $f(x)$ :
  - a) no intervalo  $[a, b]$
  - b) no intervalo  $[0, b]$  em cossenos
  - c) no intervalo  $[0, b]$  em senos
  - d) no intervalo  $[0, b]$  em senos e cossenos (série completa)
  - e) no caso de  $f$  ter período  $p$
  - f) no caso de  $f$  ser par e ter período  $p$
- 2] Calcule  $S_F(0)$  e  $S_F(0,5)$ , sendo  $S_F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x]$  a série de Fourier da função dada por  $f(x) = x^2 + 1$  se  $x \in [0, 1]$  e tal que  $f(x+1) = f(x)$ .
- 3] Expanda a função  $f(x) = x$  para  $x \in [0, 10]$ :
  - a) numa série de Fourier
  - b) numa série de Fourier em cossenos
  - c) numa série de Fourier em senos
- 4] Expanda em série de Fourier, para  $x \in [-\pi, \pi]$ , a função  $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$ .
- 5] Usando a série de Fourier (5.6) da função em (5.5), mostre que  $\sigma \equiv \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .
- 6] Considere a seguinte função definida por uma série infinita:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx \sin nt$ , com  $x \in (0, \pi)$ . Sabendo que ela satisfaz a condição  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1$ , calcule  $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , usando o valor do somatório  $\sigma$  deduzido no exercício anterior.

## 5.5 Soluções dos Exercícios

[1]

a)  $S_F(x)$  de  $f(x)$  em  $[a, b]$ :

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \text{com } 2\ell = b - a \quad \blacksquare$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare$$

b)  $S_F^c(x)$  de  $f(x)$  em  $[0, b]$ :

$$S_F^c(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{b}, \quad \alpha_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{b} dx \quad \blacksquare$$

Nota: Tal série coincide com a  $S_F(x)$  em  $[-b, b]$  se  $f$  for par.

c)  $S_F^s(x)$  de  $f(x)$  em  $[0, b]$ :

$$S_F^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{b}, \quad \beta_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{b} dx \quad \blacksquare$$

Nota: Tal série coincide com a  $S_F(x)$  em  $[-b, b]$  se  $f$  for ímpar.

d)  $S_F(x)$  de  $f(x)$  em  $[0, b]$ :

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \text{com } 2\ell = b \quad \blacksquare$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^b f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_0^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_0^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare$$

e)  $S_F(x)$  de  $f(x)$  com período  $p$ :

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \text{com } 2\ell = p \quad \blacksquare$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

f)  $S_F(x)$  de  $f(x)$  par e com período  $p$ :

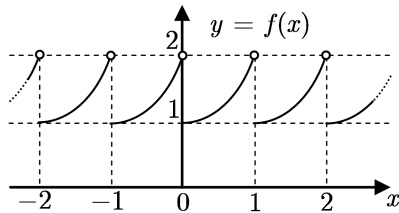
$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad \blacksquare$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (c \in \mathbb{R}), \quad \text{com } 2\ell = p,$$

onde podemos fazer  $c = -\ell$ , obtendo a seguinte fórmula para os coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{-\ell+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare.$$

[2]



$$S_F(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 3/2 \quad \blacksquare$$

$$S_F(0, 5) = f(0, 5) = [x^2 + 1]_{x=0,5} = 1,25 \quad \blacksquare$$

a)  $S_F(x)$  de  $f(x) = x$  em  $[0, 10]$ :

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in (0, 10).$$

$$2\ell = 10 \Rightarrow \ell = 5.$$

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_0^{10} x \, dx = 10.$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} x \cos \frac{n\pi x}{5} \, dx = \frac{1}{5} \left\{ \underbrace{\frac{5}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{5}}_0 \Big|_0^{10} - \frac{5}{n\pi} \int_0^{10} \sin \frac{n\pi x}{5} \, dx \right\} = \frac{5}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_0^{10} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} x \sin \frac{n\pi x}{5} \, dx = \frac{1}{5} \left\{ \frac{5}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_{10}^0 + \frac{5}{n\pi} \underbrace{\int_0^{10} \cos \frac{n\pi x}{5} \, dx}_0 \right\} = \frac{-10}{n\pi}.$$

$$S_F(x) = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{5} \quad \blacksquare$$

b)  $S_F^c(x)$  de  $f(x) = x$  em  $[0, 10]$ :

$$S_F^c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in (0, \ell), \text{ com } \ell = 10.$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \, dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x \, dx = \frac{x^2}{10} \Big|_0^{10} = \frac{100}{10} = 10.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x \cos \frac{n\pi x}{10} \, dx = \frac{1}{5} \left\{ \underbrace{\frac{10}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{10}}_0 \Big|_0^{10} - \frac{10}{n\pi} \int_0^{10} \sin \frac{n\pi x}{10} \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \left( \frac{10}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{10} \Big|_0^{10} \right\} = \frac{20}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -40/(\pi^2 n^2) & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases}. \end{aligned}$$

$$S_F^c(x) = 10 - \frac{40}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{10} \quad \blacksquare$$

c)  $S_F^s(x)$  de  $f(x) = x$  em  $[0, 10]$ :

$$S_F^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in (0, \ell), \text{ com } \ell = 10.$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x \sin \frac{n\pi x}{10} \, dx = \frac{1}{5} \left\{ -\frac{10}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{10} \Big|_0^{10} + \frac{10}{n\pi} \underbrace{\int_0^{10} \cos \frac{n\pi x}{10} \, dx}_0 \right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} [10 \cos n\pi] = -\frac{20}{n\pi} (-1)^n.$$

$$S_F^s(x) = -\frac{20}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{10} \quad \blacksquare$$

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = 0 \quad (n \neq 0).$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = - \left. \frac{\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} = - \frac{\cos n\pi - 1}{n} = - \frac{(-1)^n - 1}{n}$$

$$= \begin{cases} 2/n & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases}.$$

$$S_F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \blacksquare$$

---

[5]

---

Fazendo  $x = 0$  em (5.6), obtemos

$$S_F(0) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\left( \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)}_{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\pi}{2} \left[ S_F(0) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Por outro lado, podemos calcular  $S_F(0)$  usando (5.10) tomando  $f(x)$  como sendo a função em (5.5):

$$S_F(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, substituindo este resultado na equação anterior, terminamos a demonstração:

$$\sigma = \frac{\pi}{2} \underbrace{\left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]}_{\pi/4} = \frac{\pi^2}{8} \blacksquare$$

---

[6]

---

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_1^{\infty} n \beta_n \operatorname{sen} nx \cos nt \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_1^{\infty} n \beta_n \operatorname{sen} nx = 1, \text{ com } x \in (0, \pi).$$

Os coeficientes  $n \beta_n$  dessa série de Fourier em senos da função constante igual a 1 são

$$n \beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = - \frac{2}{\pi} \left. \frac{\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} = - \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\pi - 1}{n}$$

$$= - \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n} = \begin{cases} 4/(\pi n) & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_n = \begin{cases} 4/(\pi n^2) & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases}.$$

Portanto,

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nt = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nt = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nt,$$

donde,

$$u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underbrace{\left[ \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right]_{\pm 1}^2}_{\pm 1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \underbrace{\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\sigma = \pi^2/8} = \frac{4}{\pi} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2} \blacksquare$$

## Capítulo 6

# Resolução de Equações Diferenciais Parciais Clássicas por Separação de Variáveis

{Ref. [14], seções 12.1, 12.3 a 12.5, e 13.1}

### 6.1 Autofunções

Se, em (3.2),  $V$  é o espaço vetorial das funções reais de uma variável real, isto é, o vetor  $v$  é uma função  $\psi(x)$  genérica definida num intervalo qualquer  $I \subset \mathbb{R}$ , e  $L$  é um operador diferencial linear, então, conforme delineado no texto quadriculado ao final da subseção 3.1.2, o problema de autovalor em (3.3) consiste em resolver a *equação diferencial*  $L\psi(x) = \lambda\psi(x)$ , com  $x \in I$ , para determinar os autovalores  $\lambda_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) e as respectivas autofunções  $\psi_{nj}(x)$  ( $j = 1, g_n$ ). Quando um problema como esse surge nas aplicações, em sua formulação, além da condição de  $\psi(x)$  diferir da solução trivial  $\psi(x) = 0$  em  $I$ , também se encontra a condição de  $\psi$  ser finita em  $I$ , e geralmente ainda existem condições que  $\psi(x)$  deve satisfazer nos extremos (na fronteira) do intervalo  $I$ , denominadas condições de fronteira<sup>(†)</sup>. Problemas de autovalor sob condições como essas e baseados numa EDO de forma padronizada (porém de ampla aplicação) formam a classe dos denominados *Problemas de Sturm-Liouville*, algo muito maior do que podemos considerar nesta disciplina. Portanto, restringimos aqui o desenvolvimento desse assunto apenas resolvendo, no espaço das funções, os problemas de autovalor que encontrarão aplicação nos problemas físicos discutidos mais adiante.

Assim, uma vez que nas aplicações físicas abordadas só emergirão problemas de autovalor baseados na EDO  $\psi''(x) + \lambda\psi(x) = 0$ , em que  $L = -d^2/dx^2$ , apenas este operador será considerado (os problemas de autovalor a serem resolvidos diferirão nas condições de fronteiras a serem impostas). Além disso, nessas aplicações físicas, não haverá necessidade de considerar um intervalo  $I$  diferente de  $(0, \ell)$ , com exceção de  $I = (-\infty, \infty)$ . Por último, neste estudo introdutório, consideramos que a condição de fronteira em cada extremo ( $x = 0$  ou  $\ell$ ) de  $I = (0, \ell)$  seja apenas de um dos dois tipos: a condição de Dirichlet  $\psi = 0$  ou a condição de Neumann  $\psi' = 0$ , e, quando  $I$  não possuir extremos, isto é,  $I = (-\infty, \infty)$ , consideramos que  $\psi(x)$  tenha o período  $2\ell$  (definido pelas condições reais do problema físico):  $\psi(x) = \psi(x + 2\ell) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , que é a chamada condição periódica.

Listamos abaixo, antes de resolvê-los, os problemas de autovalores de interesse – os que são baseados na EDO  $\psi''(x) + \lambda\psi(x) = 0$  sob as condições mencionadas acima – juntamente com suas soluções, compostas pelos autovalores e respectivas autofunções:

$$\text{i) } \boxed{\psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi(0) = \psi(\ell) = 0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 & (n = 1, 2, 3 \dots) \\ \psi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \end{cases} \quad (6.1)$$

(condições de Dirichlet)

$$\text{ii) } \boxed{\psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 & (n = 0, 1, 2 \dots) \\ \psi_n(x)|_{n \geq 1} = \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_0(x) = 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

(condições de Neumann)

<sup>(†)</sup>A EDO juntamente com condições desse tipo formam o que se diz ser um Problema de Valor de Fronteira; recorde-se que há também o conhecido Problema de Valor Inicial

$$\text{iii) } \boxed{\begin{array}{l} \psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \psi(x) = \psi(x+2\ell) \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \psi_{n1}(x)|_{n \geq 1} = \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_{01}(x) = 1 \\ \psi_{n2}(x)|_{n \geq 1} = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \\ \downarrow \psi_n(x) \text{ genérico do autoespaço } S_{\lambda_n} \text{ de } \lambda_n \\ \psi_n(x)|_{n \geq 1} = a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_0(x) = 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

(condição periódica: período  $2\ell$ )

Passemos agora ao cálculo dos autovalores e respectivas autofunções desses três<sup>(†)</sup> problemas de autovalor. Nesse cálculo é usada a seguinte expressão da solução geral da EDO  $\psi''(x) + \lambda\psi(x) = 0$  :

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 x & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx \text{ (ou } c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) & \text{se } \lambda = -k^2 \text{ (} k > 0 \text{)} \\ c_1 \cos kx + c_2 \sin kx & \text{se } \lambda = k^2 \text{ (} k > 0 \text{)} \end{cases},$$

onde expressamos  $\lambda = k^2$  ou  $\lambda = -k^2$  (com  $k > 0$ ) para respectivamente atribuir a  $\lambda$  qualquer valor real positivo ou negativo (consideramos  $k > 0$  para que a relação entre  $\lambda$  e  $k$  seja biunívoca: a cada valor de  $\lambda$  corresponde um único valor de  $k$ , e a cada um de  $k$ , um único de  $\lambda$ ). Essa solução geral é deduzida na seção 6.7.2.

• Resolução do Prob. (i):

Para  $\lambda = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 + c_2 x \\ \psi(0) = c_1 = 0 \\ \psi(\ell) = c_2 \ell = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \text{ (} \forall x \text{)} \text{ é a única solução;} \\ \text{logo, zero não é autovalor.} \end{cases}$$

Para  $\lambda < 0 : \lambda \equiv -k^2 \text{ (} k > 0 \text{)}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx \\ \psi(0) = c_1 = 0 \\ \psi(\ell) = c_2 \underbrace{\sinh k\ell}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 \text{ (} \forall x \text{)} \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalores negativos.} \end{cases}$$

Para  $\lambda > 0 : \lambda \equiv k^2 \text{ (} k > 0 \text{)}$ :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_1 \cos kx + c_2 \sin kx . \\ \psi(0) &= c_1 = 0 \Rightarrow \underline{\psi(x) = c_2 \sin kx} . \\ \psi(\ell) &= c_2 \sin k\ell = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi \Rightarrow k = k_n = n\pi/\ell \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{)} . \end{aligned}$$

(\*) admitimos  $c_2 \neq 0$  para viabilizar solução  $\psi(x)$  não nula

(†) excluímos  $n = \dots, -2, -1$  e  $0$ , pois  $k > 0$

Portanto,  $\lambda = \lambda_n = k_n^2 = (n\pi/\ell)^2 \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{)}$  são os autovalores, e  $\psi_n(x) = c_{2n} \sin(n\pi x/\ell)$  são as autofunções correspondentes, nas quais as constantes  $c_{2n}$  podem ser ignoradas, pois basta tomar uma única autofunção do autoespaço de  $\lambda_n$ . Estão assim justificados os resultados em (6.1).

Note que obtemos uma *infinitude* de autovalores  $\lambda_n \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{)}$ , todos de multiplicidade geométrica igual a 1, pois a cada um desses autovalores só corresponde uma autofunção  $\psi_n(x) = \sin(n\pi x/\ell)$  (cada autoespaço  $S_{\lambda_n}$  é de dimensão unitária). A infinitude de autovalores neste problema é uma ocorrência característica de operadores em espaços vetoriais de dimensão infinita, tal qual o espaço das funções.

(†) Outros dois poderiam ser considerados sem muita dificuldade: um com as condições de fronteira  $\psi(0) = \psi'(\ell) = 0$  e o outro com  $\psi'(0) = \psi(\ell) = 0$ , mas estes casos são mais bem abordados quando se estudam as séries de Fourier generalizadas, que está fora dos objetivos desta disciplina.

• Resolução do Prob. (ii):

Para  $\lambda = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 + c_2 x \\ \psi'(0) = c_2 = 0 \\ \psi'(\ell) = c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = c_1 \text{ é solução não nula,} \\ \text{pois } c_1 \text{ permanece arbitrário;} \\ \text{logo, zero é autovalor.} \end{cases}$$

Para  $\lambda < 0 : \lambda \equiv -k^2 (k > 0)$ :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx \\ \psi'(x) = c_1 k \sinh kx + c_2 k \cosh kx \\ \psi'(0) = c_2 k = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ (pois } k \neq 0) \\ \psi'(\ell) = c_1 \underbrace{k \sinh k\ell}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = 0 (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{não há autovalores negativos.} \end{cases}$$

Para  $\lambda > 0 : \lambda \equiv k^2 (k > 0)$ :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_1 \cos kx + c_2 \sin kx . \\ \psi'(x) &= -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx . \\ \psi'(0) &= c_2 k = 0 \xrightarrow{k \neq 0} c_2 = 0 \Rightarrow \underline{\psi(x) = c_1 \cos kx} . \\ \psi'(\ell) &= -c_1 k \sin k\ell = 0 \xrightarrow{(*)} \sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi \Rightarrow k = k_n = n\pi/\ell \quad (n = 1, 2, 3, \dots) . \end{aligned}$$

(\*) admitimos  $c_1 \neq 0$  para viabilizar solução  $\psi(x)$  não nula

(†) excluimos  $n = \dots, -2, -1$  e  $0$ , pois  $k > 0$

Portanto,  $\lambda = \lambda_n = k_n^2 = (n\pi/\ell)^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) são os autovalores, e  $\psi_n(x) = \cos(n\pi x/\ell)$  (ignorando-se quaisquer constantes multiplicativas) são as autofunções correspondentes. Note que nessa resposta está incluído o autovalor nulo  $\lambda_0 = 0$  e a autofunção correspondente  $\psi_0(x) = 1$  ( $c_1$  foi ignorado), associados a  $n = 0$ . Estão assim justificados os resultados em (6.2).

• Resolução do Prob. (iii):

Para  $\lambda = 0$ :

$$\psi(x) = c_1 + c_2 x .$$

$$\psi(x + 2\ell) = \psi(x) \Rightarrow c_1 + c_2(x + 2\ell) = c_1 + c_2 x \Rightarrow c_2 2\ell = 0 \Rightarrow c_2 = 0 .$$

$\psi(x) = c_1$  é solução não nula, pois  $c_1$  permanece arbitrário, existindo, portanto, o autovalor zero.

Para  $\lambda < 0 : \lambda \equiv -k^2 (k > 0)$ :

$$\psi(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx .$$

$$\psi(x + 2\ell) = \psi(x) \Rightarrow c_1 \cosh [k(x + 2\ell)] + c_2 \sinh [k(x + 2\ell)] = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx) .$$

$$\begin{aligned} c_1 \cosh(kx) \cosh(k 2\ell) + c_1 \sinh(kx) \sinh(k 2\ell) + c_2 \sinh(kx) \cosh(k 2\ell) \\ + c_2 \sinh(k 2\ell) \cosh(kx) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{[c_1 \cosh(k 2\ell) + c_2 \sinh(k 2\ell) - c_1]}^{\text{deve anular-se}} \cosh(kx) + \\ \underbrace{[c_1 \sinh(k 2\ell) + c_2 \cosh(k 2\ell) - c_2]}_{\text{deve anular-se}} \sinh(kx) = 0 \quad \forall x . \end{aligned}$$

$$\begin{cases} [\cosh(k 2\ell) - 1] c_1 + [\sinh(k 2\ell)] c_2 = 0 \\ [\sinh(k 2\ell)] c_1 + [\cosh(k 2\ell) - 1] c_2 = 0 . \end{cases}$$

Esse é um sistema algébrico homogêneo de incógnitas  $c_1$  e  $c_2$ , cujo determinante deve anular-se para existirem soluções distintas da solução trivial  $c_1 = c_2 = 0^{(*)}$ . Então obtemos

$$\begin{vmatrix} \cosh(k 2\ell) - 1 & \sinh(k 2\ell) \\ \sinh(k 2\ell) & \cosh(k 2\ell) - 1 \end{vmatrix} = [\cosh(k 2\ell) - 1]^2 - \sinh^2(k 2\ell) = 0$$

$$\Rightarrow \cosh^2(k 2\ell) - 2 \cosh(k 2\ell) + 1 - \sinh^2(k 2\ell) = \underbrace{\cosh^2(k 2\ell) - \sinh^2(k 2\ell)}_1 + 1 - 2 \cosh(k 2\ell) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cosh(k 2\ell) = 0 \Rightarrow \cosh(k 2\ell) = 1 \Rightarrow k 2\ell = 0 \Rightarrow k = 0 : \text{ contra nossa hipótese}$$

$$\Rightarrow \text{ não há autovalores negativos.}$$

Para  $\lambda > 0 : \lambda \equiv k^2 (k > 0) :$

$$(\star) \quad \psi(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx .$$

$$\psi(x + 2\ell) = \psi(x) \Rightarrow c_1 \cos [k(x + 2\ell)] + c_2 \sin [k(x + 2\ell)] = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) .$$

$$\begin{aligned} c_1 \cos(kx) \cos(k 2\ell) - c_1 \sin(kx) \sin(k 2\ell) + c_2 \sin(kx) \cos(k 2\ell) \\ + c_2 \sin(k 2\ell) \cos(kx) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{[c_1 \cos(k 2\ell) + c_2 \sin(k 2\ell) - c_1]}^{\text{deve anular-se}} \cos(kx) + \\ \underbrace{[-c_1 \sin(k 2\ell) + c_2 \cos(k 2\ell) - c_2]}_{\text{deve anular-se}} \sin(kx) = 0 \quad \forall x . \end{aligned}$$

$$(\star\star) \quad \begin{cases} [\cos(k 2\ell) - 1] c_1 + [\sin(k 2\ell)] c_2 = 0 \\ -[\sin(k 2\ell)] c_1 + [\cos(k 2\ell) - 1] c_2 = 0 . \end{cases}$$

Novamente igualamos a zero o determinante desse sistema, obtendo

$$\begin{aligned} [\cos(k 2\ell) - 1]^2 + \sin^2(k 2\ell) = 0 \Rightarrow \cos^2(k 2\ell) - 2 \cos(k 2\ell) + 1 + \sin^2(k 2\ell) = 0 \\ \Rightarrow \cos(k 2\ell) = 1 \Rightarrow k 2\ell = 2n\pi \Rightarrow k = k_n = n\pi/\ell \quad (n = 1, 2, 3 \dots) . \end{aligned}$$

Observe que, com  $k = k_n$ , as equações do sistema  $(\star\star)$  tornam-se a identidade  $0 = 0$ , significando que permanecem arbitrárias as constantes  $c_1$  e  $c_2$  em  $(\star)$ . Logo,  $\psi_n(x) = c_{1n} \cos k_n x + c_{2n} \sin k_n x$  (v. Observação  $[\#]$  abaixo) expressa uma autofunção genérica correspondente ao autovalor  $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/\ell)^2$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ).

A cada autovalor  $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/\ell)^2$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) corresponde o autoespaço  $S_{\lambda_n}$  formado pelas autofunções  $\psi_n(x) = c_{1n} \cos k_n x + c_{2n} \sin k_n x$ , de dimensão 2, no qual podemos escolher  $\psi_{n1}(x) = \cos k_n x$  e  $\psi_{n2}(x) = \sin k_n x$  como "as duas" autofunções associadas a  $\lambda_n$ .

Já ao autovalor  $\lambda_0 = 0$  corresponde o autoespaço  $S_{\lambda_0}$  formado pelas autofunções  $\psi_0(x) = c_{10}$ , de dimensão 1, no qual escolhemos  $\psi_0(x) = 1$  como a autofunção associada.

Os resultados em (6.3) estão comprovados.

*Observação  $[\#]$ :* Para cada autoespaço  $S_{\lambda_n}$  ser gerado por todas as combinações lineares do par de autofunções  $\psi_{n1}(x)$  e  $\psi_{n2}(x)$ , devemos empregar, em cada autoespaço, duas constantes realmente arbitrárias, o que não aconteceria se escrevêssemos que uma autofunção qualquer de  $S_{\lambda_n}$  fosse dada pela combinação linear  $\psi_n(x) = c_1 \cos k_n x + c_2 \sin k_n x$ , usando as mesmas constantes  $c_1$  e  $c_2$  (em vez de  $c_{1n}$   $c_{2n}$ ) em todos autoespaços.

(\*) Um sistema homogêneo de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas  $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$  [onde  $\underline{A}$  é a matriz quadrada dos coeficientes,  $\underline{x}$  é a matriz coluna das incógnitas, e  $\underline{0}$  é a matriz coluna nula] admite solução não nula se e somente se  $\det \underline{A} = 0$ . (Se  $\det \underline{A} \neq 0$ , só há a solução nula  $\underline{x} = \underline{0}$ .)

## 6.2 Equação do Calor Unidimensional

A equação do calor é

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} . \quad (6.4)$$

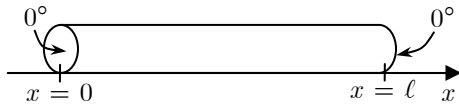
A grandeza relevante a se calcular é a temperatura  $T(\vec{r}, t)$ , no instante  $t$ , no ponto  $\vec{r}$  de um objeto constituído de um material de difusividade térmica  $\alpha$  constante. Nessa equação,  $\nabla^2 T$  denota o laplaciano de  $T$  [v. subseção 6.7.1].

Nosso objetivo aqui é calcular a temperatura  $T(x, t)$  numa barra sem fontes ou sorvedouros de calor em seu interior, paralela ao eixo  $x^{(*)}$ , entre as abscissas  $x = 0$  e  $x = \ell$ , sendo conhecida a temperatura inicial  $T_0(x, 0)$ , que não se anula identicamente<sup>(†)</sup>, o que é formulado como segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} , & x \in (0, \ell) , \quad t \in (0, \infty) \\ T(x, 0) = T_0(x) , & x \in (0, \ell) , \end{cases} \quad (6.5)$$

onde escrevemos  $\nabla^2 T = d^2T/dx^2$ , porque  $T$  só varia ao longo do eixo  $x$ . Essa formulação deve ser complementada pelas condições de fronteira, sendo essas que distinguirão os problemas que são resolvidos nos exemplos a seguir.

—— **Exemplo 6.1.** Extremos da barra mantidos em  $0^\circ$ .



Nesse caso, as condições de fronteira são dadas por

$$T(0, t) = T(\ell, t) = 0 , \quad t \in (0, \infty) . \quad (6.6)$$

Sob essas condições (homogêneas), a equação do calor em (6.5) admite a solução *trivial*  $T(x, t) \equiv 0$  (identicamente nula), mas é fisicamente óbvio que esta não pode ser a solução do problema em questão, pois a temperatura na barra é, inicialmente, dada pela função *não nula*  $T_0(x)$ . O que se espera é que a temperatura tenda a zero assintoticamente no tempo ( $t \rightarrow \infty$ ) à medida que a barra entre em equilíbrio térmico com os reservatório térmicos a  $0^\circ$  em contato com seus extremos. Alude-se várias vezes abaixo ao fato de que só se aceita solução  $T(x, t) \neq 0$ .

a) Separação de variáveis:

Admitamos que a solução possa ser assim expressa:

$$T(x, t) = \psi(x)\tau(t) , \quad (6.7)$$

isto é, pelo produto de uma função só de  $x$  por outra função só de  $t$  (a *parte espacial* e a *parte temporal* da solução, respectivamente). Substituindo (6.7) em (6.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\psi(x)\tau(t)] &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\psi(x)\tau(t)] \quad \Rightarrow \quad \psi''\tau = \frac{1}{\alpha} \psi\tau' \\ \Rightarrow \quad \frac{\psi''}{\psi} &= \frac{\tau'}{\alpha\tau} = -\lambda \text{ (constante)} , \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde  $\psi'' = d^2\psi/dx^2$  e  $\tau' = d\tau/dt$ . A conclusão de que ambos os membros da equação acima é constante segue desse raciocínio: Tal equação apresenta a peculiaridade de que o primeiro membro só depende de  $x$  e o segundo, só de  $t$ . Logo, se  $t$  for mantido fixo, o segundo membro mantém-se constante e, por causa da igualdade dos membros, também o primeiro permanece constante, mesmo que  $x$  varie, significando que o primeiro membro não depende de  $x$ . Similarmente, fixando  $x$ , mantemos constantes ambos os membros, ainda que  $t$  varie no segundo membro, que não deve depender de  $t$ , portanto.

Chamamos  $\lambda$  de *constante de separação* [que, na equação acima, encontra-se precedida de um sinal negativo, sem qualquer perda de generalidade, por mera questão de conveniência notacional: v. a Nota

(\*) Admite-se que a temperatura na barra só varie longitudinalmente, isto é, com a abscissa, o que é razoável se a superfície lateral da barra estiver isolada termicamente e um equilíbrio térmico já tiver se estabelecido transversalmente.

(†) Dizemos que uma função  $f(x)$  se *anula identicamente* se ela for nula em todo seu domínio. Usamos as notações  $f(x) \equiv 0$  e  $f(x) \neq 0$  para denotar que  $f(x)$  se anula identicamente e que  $f(x)$  não se anula identicamente, respectivamente.

na pág. 107]. De (6.8) resultam duas EDOs, uma, para a parte espacial da solução, e a outra, para a parte temporal:

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi(x) = 0 & \dots\dots\dots \text{EDO espacial} \\ \tau' + \lambda\alpha\tau(t) = 0 & \dots\dots\dots \text{EDO temporal} \end{cases} \quad (6.9)$$

b) Problema de autovalor para a parte espacial:

Substituindo (6.7) nas condições de fronteira dadas por (6.6), obtemos

$$T(0, t) = \underbrace{\psi(0)}_{\neq 0} \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \quad \text{e} \quad T(0, t) = \underbrace{\psi(\ell)}_{\neq 0} \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \quad .$$

Como essas equações devem valer para  $t > 0$ , e, conforme indicado acima, a parte temporal não pode anular-se identicamente [pois, caso contrário, obteríamos  $T(x, t) = \psi(x)\tau(t) \equiv 0$ , a indesejada solução trivial], constatamos que  $\psi(x)$  deve satisfazer as condições de fronteira  $\psi(0) = 0$  e  $\psi(\ell) = 0$  (as mesmas impostas à temperatura  $T$ ). A parte espacial da solução deve, portanto, ser solução do seguinte *problema de valor de fronteira* [v. o rodapé (†) na pág. 97] :

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi(0) = \psi(\ell) = 0 \quad . \quad (6.10)$$

Este problema, por ser homogêneo, admite a solução trivial  $\psi(x) \equiv 0$ . Mas ela deve ser rejeitada, pois, novamente, se  $\psi(x) \equiv 0$  então  $T(x, t) = \psi(x)\tau(t) \equiv 0$ . Para determinar uma solução de (6.10) distinta da trivial, dispomos da constante de separação, introduzida sem qualquer restrição. A ela podemos, portanto, impor condições que nos interessem; no caso, exigimos que  $\lambda$  apresente apenas os valores (os ditos *autovalores*) que acarretem soluções do problema em (6.10) distintas da trivial (as *autofunções*). Temos assim caracterizado um problema de autovalor; (6.10) é exatamente um dos que já resolvemos: v. (6.1). Portanto, os autovalores e autofunções são

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \longleftrightarrow \psi_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad .$$

c) A parte temporal correspondente ao autovalor  $\lambda = \lambda_n$  :

Resolvendo a EDO temporal em (6.9) com  $\lambda = \lambda_n = (n\pi/\ell)^2$ , obtemos

$$\tau'_n + \lambda_n \alpha \tau_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_n(t) = c_n e^{-\lambda_n \alpha t}, \quad \text{ou} \quad \tau_n(t) = e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \alpha t},$$

onde ignoramos a constante de integração  $c_n$ , porque, mais adiante, ela se apresentaria multiplicada desnecessariamente por outra constante arbitrária,  $B_n$ , na formação da solução mais geral (v. item (e) abaixo).

d) A solução  $T_n(x, t)$  correspondente ao autovalor  $\lambda = \lambda_n$  :

$$T_n(x, t) = \psi_n(x)\tau_n(t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \alpha t} \quad .$$

e) A solução mais geral:

Ao admitirmos uma solução na forma de (6.7), obtivemos uma infinidade delas,  $\{T_n(x, t)\}_{n=1}^{\infty}$ , linearmente independentes. Logo, pelo princípio da superposição, uma combinação linear delas é também solução; na verdade, trata-se da solução mais geral do problema sem levar em conta a condição inicial:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \alpha t} \quad \blacksquare \quad (6.11)$$

Nota: Acima, chamamos de "solução mais geral" a solução que se obtém na forma de uma série infinita pelo método de separação de variáveis e que satisfaz todas as condições de fronteira *homogêneas*. Por simplicidade, daqui por diante, passaremos a designá-la pela terminologia mais simples e mais usada solução geral, com a ressalva de que não se provou que a solução obtida pelo procedimento apresentado é realmente a solução geral. Tal solução se torna a solução específica do problema físico quando os coeficientes da série são determinados a partir das condições não homogêneas, tais como, por exemplo, as condições iniciais, que é o próximo passo dessa resolução.

f) Cálculo dos coeficientes na solução geral em (6.11):

Usando a condição inicial, determinamos  $B_n$ :

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = T_0(x), \quad \text{com } x \in (0, \ell),$$

onde vemos que  $B_n$  são os coeficientes da já estudada série de Fourier de  $T_0(x)$  em senos. Portanto, de acordo com (5.13b), temos que:

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare \quad (6.12)$$

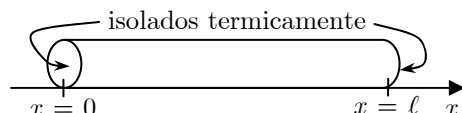
g) Observações:

i) A solução do problema de temperatura que acabamos de resolver consiste na série em (6.11) com os coeficientes dados por (6.12) (são as equações finalizadas por quadrículas pretas, que serão usadas também nos problemas seguintes com essa intenção).

ii) Note que  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = 0$ , como há de ser, pois a barra inteira tende a ficar em equilíbrio térmico com os seus extremos mantidos em  $0^\circ$ .

—— **Exemplo 6.2.** Extremos da barra isolados termicamente.

Nesse caso, as condições de fronteira são dadas por<sup>(\*)</sup>



$$\frac{\partial T}{\partial x}(0^+, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\ell^-, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (6.13)$$

Com a separação de variáveis  $T(x, t) = \psi(x)\tau(t)$ , obtemos novamente a equação (6.8) e as mesmas EDOs em (6.9).

Nada impede que a EDO temporal seja a primeira a ser resolvida, obtendo-se

$$\tau_\lambda(t) = A_\lambda e^{-\lambda \alpha t} \xrightarrow[\text{se } \lambda = 0]{\text{em particular}} \tau_0(t) = A_0, \quad (6.14)$$

apesar de  $\lambda$  ainda se encontrar indeterminado. Os valores dessa constante tornam-se definidos resolvendo-se o problema de autovalor

$$\psi'' + \lambda \psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi'(0^+) = \psi'(\ell^-) = 0, \quad (6.15)$$

formado pela EDO espacial e por condições de fronteira semelhantes às impostas a  $T$  (a exigência de que a derivada em relação a  $x$  se anule nos extremos), que são deduzidas de modo análogo àquele no item (b) do Exemplo 6.1:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \psi'(x) \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) = 0 \quad \text{se } x = 0 \text{ ou } x = \ell.$$

O problema de autovalor em (6.15) é um dos que já resolvemos: v. (6.2). Portanto,

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \longleftrightarrow \psi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{e} \quad \lambda_0 = 0 \longleftrightarrow \psi_0(x) = 1. \quad (6.16)$$

O problema de calor em questão, *sem considerar a condição inicial*, apresenta então a infinidade de soluções,

$$T_n(x, t) = \psi_n(x)\tau_n(t) = \cos \frac{n\pi x}{\ell} e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \alpha t} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{e} \quad T_0(x, t) = \psi_0(x)\tau_0(t) = 1,$$

sendo a solução geral a combinação linear delas:

$$T(x, t) = A_0 T_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \alpha t} \quad \blacksquare \quad (6.17)$$

(\*) Essa condição de fronteira, brevemente explicada, é consequência da lei de Fourier, pela qual, num ponto do sistema, o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura, igual a  $\nabla T = \vec{i} \partial T / \partial x$  nesse nosso problema unidimensional. Assim, se a fronteira é isolada termicamente, então não há fluxo de calor através dela e, portanto,  $\partial T / \partial x = 0$  nela.



Pela imposição da condição inicial, determinamos as constantes  $A_n$ :

$$T(x, 0) = \frac{2A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = T_0(x), \quad \text{com } x \in (0, \ell),$$

onde vemos que  $2A_0, A_1, \dots$  são os coeficientes da já estudada série de Fourier de  $T_0(x)$  em cossenos; usando (5.13a), obtemos

$$2A_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T_0(x) dx \quad \text{e} \quad A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T_0(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare \quad (6.18)$$

A solução do problema é dada por (6.17) e (6.18).

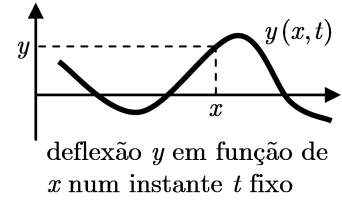
Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} T_0(x) dx,$$

que é a média da temperatura inicial na barra, como deve ser, pois a barra, sendo isolada termicamente, retém todo o calor, e este tende a nela se distribuir uniformemente com o passar do tempo.

### 6.3 Equação da Onda Unidimensional

Nesta seção resolvemos problemas de *corda vibrante*, nos quais o objetivo principal é o cálculo da forma da corda num instante arbitrário. A corda geralmente encontra-se vibrando, permitindo-se na formulação, porém, o caso excepcional de apresentar-se estática, quando então ela se encontra estirada ao longo do eixo horizontal  $x$  entre as abscissas  $x = 0$  e  $x = \ell$ . Sua forma pode ser descrita por uma função  $y(x, t)$  (v. figura à direita), que fornece, no instante  $t$  e na abscissa  $x$ , a *deflexão*  $y$  da corda em relação ao eixo  $x$ . Admitimos que a corda encontra-se livre de qualquer força externa sobre ela, sendo conhecida a sua forma inicial  $y_0(x)$  e a sua distribuição inicial de velocidades verticais<sup>(\*)</sup>  $v_0(x)$ , funções que, por hipótese, não se anulam identicamente ao mesmo tempo. Note que tanto  $y(x, t)$  quanto  $v(x, t) = \partial y / \partial t$  podem ter valores positivos, nulo ou negativos, pois, em relação ao eixo  $x$ , ela pode se encontrar acima ( $y > 0$ ) ou abaixo ( $y < 0$ ), e um ponto seu qualquer pode subir ( $v > 0$ ) ou descer ( $v < 0$ ).

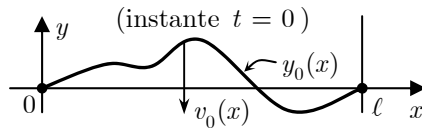


Esse problema é formulado como segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, & x \in (0, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad c > 0 \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \text{para } x \in (0, \ell). \end{cases} \quad (6.19)$$

Essa formulação deve ser complementada pelas condições de fronteira, sendo essas que distinguirão os problemas que são resolvidos nos exemplos.

—— **Exemplo 6.3.** Extremos da corda presos à mesma altura  $y = 0$ .



Nesse caso, as condições de fronteira são dadas por

$$y(0, t) = y(\ell, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (6.20)$$

Com a separação de variáveis  $y(x, t) = \psi(x)\tau(t)$ , a equação da onda acima toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\psi(x)\tau(t)] &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\psi(x)\tau(t)] \Rightarrow \psi''\tau = \frac{1}{c^2} \psi\tau'' \\ \Rightarrow \frac{\psi''}{\psi} &= \frac{\tau''}{c^2\tau} = -\lambda \text{ (constante)} \Rightarrow \begin{cases} \psi'' + \lambda\psi = 0 \\ \tau'' + \lambda c^2\tau = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.21)$$

pois, pelo modo já explicado nos exemplos anteriores, substituindo  $y(x, t) = \psi(x)\tau(t)$  em (6.20), deduzimos as condições de fronteira para  $\psi(x)$ :  $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$ . Estas, juntamente com a EDO

<sup>(\*)</sup> Considera-se apenas corda com ondulações sem movimentação horizontal.

especial separada acima, formam o mesmo problema de autovalor do Exemplo 6.1, formulado em (6.10), cujas soluções são os autovalores  $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$  e as respectivas autofunções  $\psi_n(x) = \sin(n\pi x/\ell)$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

A EDO temporal acima com  $\lambda = \lambda_n = (n\pi/\ell)^2$ , isto é,

$$\tau_n'' + \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 \tau_n(t) = 0, \quad (6.22)$$

tem a seguinte solução, bem conhecida pelos que já aprenderam a resolver EDOs lineares de coeficientes constantes:

$$\tau_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi c t}{\ell}. \quad (6.23)$$

A solução geral é então

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi c t}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \blacksquare \quad (6.24)$$

Necessitamos da distribuição de velocidades na corda, que é a derivada desse resultado em relação a  $t$ :

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \frac{n\pi c}{\ell} \cos \frac{n\pi c t}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Determinamos  $A_n$  e  $B_n$  usando as condições iniciais, a partir das quais obtemos as equações

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = y_0(x)$$

e

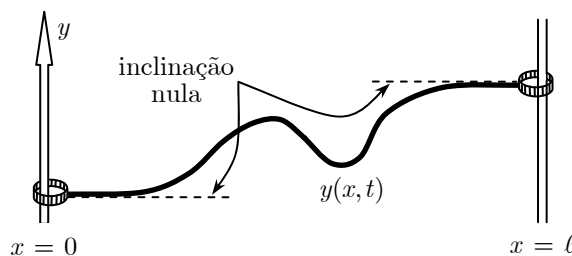
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = v_0(x).$$

Vemos que  $A_n$  e  $(n\pi c/\ell)B_n$  são respectivamente os coeficientes da série de Fourier em senos de  $y_0(x)$  e  $v_0(x)$ , com  $x$  em  $(0, \ell)$ ; logo,

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \text{e} \quad \frac{n\pi c}{\ell} B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare \quad (6.25)$$

Essas equações determinam as expressões que  $A_n$  e  $B_n$  devem ter para que (6.24) forneça a solução do problema de onda dado por (6.19).

— **Exemplo 6.4.** Os extremos da corda têm anéis que podem deslizar sem atrito em hastes verticais em  $x = 0$  e  $x = \ell$ .



Nesse caso, as condições de fronteira são<sup>(\*)</sup>

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (6.26)$$

As EDOs espacial e temporal continuam aquelas em (6.21), mas as condições de fronteira para  $\psi(x)$ , agora deduzidas de (6.26), passam a ser  $\psi'(0) = \psi'(\ell) = 0$ . Vemos, assim, que o problema de autovalor que fornece  $\psi(x)$  é aquele em (6.15),

cujas soluções, já vimos, consiste nos autovalores e autofunções em (6.16).

A parte temporal correspondente ao autovalor  $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$  também continua sendo dada por (6.23), exceto se  $n = 0$ ; neste caso, a solução da EDO temporal com  $\lambda = \lambda_0 = 0$ , isto é, da equação  $\tau_0'' = 0$ , é dada por

$$\tau_0(t) = A_0 + B_0 t. \quad (6.27)$$

(\*) Não fornecemos os detalhes de como deduzir essas condições de fronteira, mas elas seguem intuitivamente do fato de que cada arruela, não podendo ser freada pela haste, não tem como ficar abaixo ou acima da porção da corda vizinha a ela, ou seja, essa porção mantém-se na horizontal (v. a figura): inclinação nula significa derivada em relação a  $x$  nula.

A solução geral é então

$$y(x, t) = \tau_0(t)\psi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t)\psi_n(x) ,$$

ou seja,

$$y(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \blacksquare \quad (6.28)$$

Usando as condições iniciais, obtemos as seguintes séries de Fourier em cossenos em  $(0, \ell)$ :

$$y(x, 0) = \frac{2A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = y_0(x)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{2B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = v_0(x) .$$

Logo,

$$2A_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) dx \quad \text{e} \quad A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx , \quad (6.29)$$

bem como,

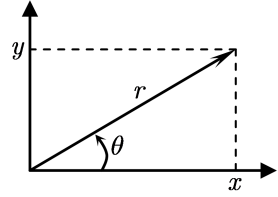
$$2B_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) dx \quad \text{e} \quad \frac{n\pi c}{\ell} B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \blacksquare \quad (6.30)$$

## 6.4 Equação de Laplace

A equação de Laplace tem a seguinte forma:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0 , \quad \vec{r} \in D ; \quad (6.31)$$

em palavras: o laplaciano da função  $u$  [v. subseção 6.7.1] deve se anular em todo ponto  $\vec{r}$  do domínio  $D$  do problema. Neste texto consideramos apenas problemas em que  $D$  é uma parte do plano  $xy$  (problemas bidimensionais). Quanto às coordenadas a se empregar na representação de  $\vec{r}$ , as indicadas para os problemas considerados são as cartesianas  $x$  e  $y$  ou as polares  $r$  e  $\theta$  (v. figura à direita), conforme a geometria do problema.



Nos problemas que seguem resolvidos não há menção a qualquer aplicação física. Mas a função  $u(\vec{r})$  poderia ser a temperatura a se calcular numa placa ocupando a região  $D$  do plano  $xy$  e cujas bordas se encontram submetidas a temperaturas conhecidas. Tal problema é bidimensional, porque se admite um equilíbrio térmico transversal (ao longo do eixo  $z$ ), e estacionário (sem variação temporal). Para entender por que (6.31) modela a temperatura estacionária  $T(\vec{r})$  numa placa, basta igualar a derivada temporal  $\partial T / \partial t$  a zero na equação do calor em (6.4), uma vez que a temperatura não varia com o tempo.

### 6.4.1 Equação de Laplace em Domínios Retangulares

Nesta subseção resolvemos a equação de Laplace em duas coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad x \in (0, \ell) , \quad y \in (0, h) , \quad (6.32)$$

sob diversas condições de fronteira, que são fornecidas em cada exemplo que segue.

— **Exemplo 6.5.**  $u(0, y) = u(\ell, y) = u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, h) = f(x)$

Substituindo a *forma separada* que se admite para a solução,

$$u(x, y) = X(x)Y(y) ,$$

nas condições de fronteira *homogêneas*, e lembrando que  $X(x) \neq 0$  e  $Y(y) \neq 0$ , obtemos as condições de fronteira para  $X(x)$  e  $Y(y)$ :

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \\ u(\ell, y) = X(\ell)Y(y) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X(0) = X(\ell) = 0 ; \quad (6.33)$$

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 . \quad (6.34)$$

Substituindo agora aquela forma separada na equação de Laplace, em (6.32), obtemos

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (XY) = X''Y + XY'' = 0 \quad \xrightarrow{\div XY} \quad \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\equiv -\lambda} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\equiv \lambda} = 0 ,$$

onde, na última equação, podemos concluir que ambos os termos aditivos são constantes, iguais em módulo e simétricas; digamos  $\pm\lambda$ .

Nota (*padronização da equação diferencial de um problema de autovalor*): Há uma razão para igualar o primeiro termo acima à constante  $-\lambda$  (o que leva o segundo termo a ser igual a  $\lambda$ ): Sempre escreveremos a equação diferencial de um problema de autovalor na forma usada no Problema de Sturm-Liouville (citado no primeiro parágrafo da seção 6.1), em que o parâmetro  $\lambda$  é precedido pelo sinal "+". No caso do presente problema, sabemos que  $X(x)$ , e não  $Y(y)$ , provém de um problema de autovalor, porque, de acordo com (6.33), as condições que  $X(x)$  deve satisfazer em ambos extremos do intervalo  $(0, \ell)$  são *homogêneas*, o que torna *homogêneo* [v. a Nota na pág. 43] o problema a se resolver para determinar  $X(x)$ .

O problema de autovalor que se obtém para  $X(x)$  é o já resolvido em (6.1), o que nos permite escrever

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 , & x \in (0, \ell) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \\ X_n(x) = \text{sen}(n\pi x/\ell) . \end{cases} \quad (6.35)$$

Já para determinar  $Y(y)$ , temos que resolver o problema formado pela EDO  $Y'' - \lambda Y(y) = 0$  com  $\lambda$  igual aos autovalores  $\lambda_n$  em (6.35) e pela condição de fronteira em (6.34), isto é, o problema

$$Y_n'' - (n\pi/\ell)^2 Y_n(y) = 0 , \quad y \in (0, h) , \quad Y_n(0) = 0 , \quad (6.36)$$

uma tarefa simples:

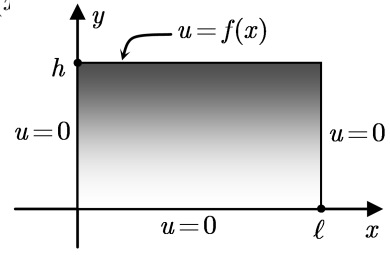
$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n \cosh(n\pi y/\ell) + B_n \sinh(n\pi y/\ell) ; \\ Y_n(0) &= A_n = 0 ; \\ Y_n(y) &= B_n \sinh(n\pi y/\ell) . \end{aligned}$$

Determinadas as expressões de  $X_n(x)$  e  $Y_n(x)$ , podemos formar a solução geral, dada pela combinação linear das soluções  $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi y}{\ell} \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \quad \blacksquare \quad (6.37)$$

Para obter a solução específica do problema, devemos calcular as constantes  $B_n$ , o que é feito impondo a condição de fronteira não homogênea (ainda não usada):

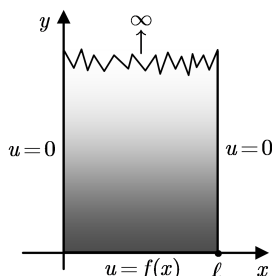
$$u(x, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n \sinh \frac{n\pi h}{\ell} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} = f(x) .$$



Esta equação mostra que o termo entre colchetes é o  $n$ -ésimo coeficiente da série de Fourier em senos de  $f(x)$ ; usando (5.13b) para calculá-los, determinamos as constantes  $B_n$ , finalizando a resolução do problema:

$$B_n \sinh \frac{n\pi h}{\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{\ell \sinh \frac{n\pi h}{\ell}} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare \quad (6.38)$$

— **Exemplo 6.6.** Com  $h \rightarrow \infty$ ,  $u(0, y) = u(\ell, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ .



As condições de fronteiras homogêneas nas bordas verticais são as mesmas do exemplo anterior, ocorrendo, portanto, o mesmo problema de autovalor para  $X(x)$ , e valendo os resultados em (6.35):  $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e  $X_n(x) = \sin(n\pi x/\ell)$ . Mas o problema para  $Y(y)$ , em vez daquele em (6.36), é agora o seguinte:

$$Y_n'' - (n\pi/\ell)^2 Y_n(y) = 0, \quad y \in (0, \infty).$$

Nesse caso,  $y$  é ilimitado, sendo conveniente expressar a solução geral dessa EDO em termos das funções exponenciais, ao invés das hiperbólicas [v. subseção 6.7.2], isto é,

$$Y_n(y) = A_n e^{n\pi y/\ell} + B_n e^{-n\pi y/\ell},$$

porque torna-se mais simples evitar soluções infinitas, bastando, para que  $\lim_{y \rightarrow \infty} Y(y)$  seja finito, fazer  $A_n = 0$ , obtendo-se  $Y_n(y) = B_n e^{-n\pi y/\ell}$ .

Assim, a solução geral da equação de Laplace satisfazendo as condições de fronteira homogêneas e de finitude é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n\pi y/\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \blacksquare \quad (6.39)$$

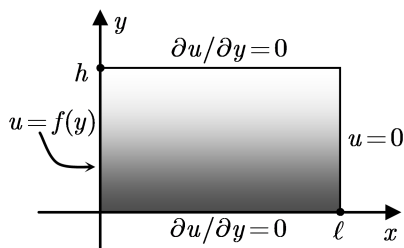
Finalmente, impondo a condição de fronteira não homogênea,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x),$$

determinamos as constantes  $B_n$  como sendo os coeficientes da série de Fourier em senos de  $f(x)$ :

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \blacksquare$$

— **Exemplo 6.7.**  $\frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, h) = u(\ell, y) = 0$ ,  $u(0, y) = f(y)$ .



Neste exemplo, são as bordas horizontais que estão submetidas a condições de fronteira *homogêneas*. Isso indica a ocorrência de um problema de autovalor para  $Y(y)$ , e não em  $X(x)$ , como nos dois exemplos anteriores.

Substituindo  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  primeiramente nas condições de fronteira *homogêneas* e lembrando que  $X(x) \neq 0$  e  $Y(y) \neq 0$ , obtemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= X(x)Y'(y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, h) &= X(x)Y'(h) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y'(0) = Y'(h) = 0;$$

$$u(\ell, y) = X(\ell)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\ell) = 0.$$

Separemos agora as variáveis na equação de Laplace:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (XY) = X''Y + XY'' = 0 \quad \xrightarrow{\div XY} \quad \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\equiv -\lambda} = 0.$$

onde, dessa vez, é a EDO para  $Y(y)$  que é separada com  $-\lambda$  em conformidade com a Nota no Exemplo 6.5. Temos então o problema de autovalor

$$Y'' + \lambda Y(y) = 0, \quad y \in (0, h), \quad Y'(0) = Y'(h) = 0,$$

que é aquele em (6.2); logo, os autovalores e autovetores são

$$\lambda_0 = 0 \leftrightarrow Y_0(y) = 1, \quad \lambda_n = (n\pi/h)^2 \leftrightarrow Y_n(y) = \cos(n\pi y/h) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

É a vez de resolver a EDO para  $X(x)$  com  $\lambda = \lambda_n$  ( $n \geq 0$ ), ou melhor, para  $X_n(x)$ , sob a condição de fronteira deduzida acima:

$$X_n'' - (n\pi/h)^2 X_n(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad X_n(\ell) = 0.$$

Para  $\lambda = \lambda_0 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} X_0''(x) = 0 &\Rightarrow X_0(x) = A_0 + B_0 x. \\ X_0(\ell) = A_0 + B_0 \ell = 0 &\Rightarrow A_0 = -B_0 \ell \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_0(x) = B_0(x - \ell).$$

Para  $\lambda = \lambda_n = (n\pi/h)^2$ :

$$X_n'' - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 X_n(x) = 0 \Rightarrow X_n(x) = A_n \cosh \frac{n\pi x}{h} + B_n \sinh \frac{n\pi x}{h}. \quad (i)$$

$$X_n(\ell) = A_n \cosh \frac{n\pi \ell}{h} + B_n \sinh \frac{n\pi \ell}{h} = 0 \Rightarrow A_n = -\frac{B_n \sinh(n\pi \ell/h)}{\cosh(n\pi \ell/h)}. \quad (ii)$$

Subst. (ii) em (i) :

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \left[ -\frac{B_n \sinh(n\pi \ell/h)}{\cosh(n\pi \ell/h)} \right] \cosh \frac{n\pi x}{h} + B_n \sinh \frac{n\pi x}{h} \\ &= \underbrace{\left[ -\frac{B_n}{\cosh(n\pi \ell/h)} \right]}_{\equiv C_n} \underbrace{\left[ \sinh \frac{n\pi \ell}{h} \cosh \frac{n\pi x}{h} - \sinh \frac{n\pi x}{h} \cosh \frac{n\pi \ell}{h} \right]}_{= \sinh \left[ \frac{n\pi \ell}{h} - \frac{n\pi x}{h} \right]} \\ &= C_n \sinh \left[ \frac{n\pi}{h}(\ell - x) \right]. \end{aligned}$$

Logo, a solução geral é

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X_0(x)Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) \\ &= B_0(x - \ell) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \left[ \frac{n\pi}{h}(\ell - x) \right] \cos \frac{n\pi y}{h} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6.40)$$

Para obter a solução específica do problema, impomos a condição de fronteira não homogênea (ainda não usada):

$$u(0, y) = \underbrace{-B_0 \ell}_{\equiv \frac{-2B_0 \ell}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \sinh \frac{n\pi \ell}{h} \right] \cos \frac{n\pi y}{h} = f(y),$$

e assim concluímos que os termos entre colchetes são os coeficientes da série de Fourier em cossenos de  $f(y)$ . Finalmente, usando (5.13a), determinamos as constantes em (6.40):

$$-2B_0 \ell = \frac{2}{h} \int_0^h f(y) dy \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{-1}{\ell h} \int_0^h f(y) dy \quad \blacksquare \quad (6.41a)$$

$$C_n \sinh \frac{n\pi \ell}{h} = \frac{2}{h} \int_0^h f(y) \cos \frac{n\pi y}{h} dy \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{2}{h \sinh \frac{n\pi \ell}{h}} \int_0^h f(y) \cos \frac{n\pi y}{h} dy \quad \blacksquare \quad (6.41b)$$

## 6.4.2 Equação de Laplace em Domínios com Bordas Circulares

Nesta subseção resolvemos a equação de Laplace em coordenadas polares (o laplaciano nessas coordenadas é deduzido na subseção 6.7.3):

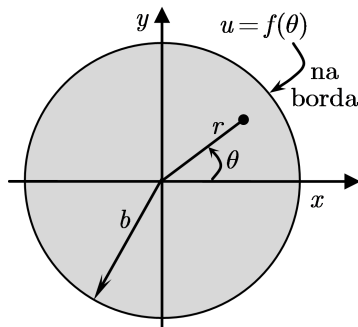
$$\nabla^2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6.42)$$

Dividimos aqui em dois tipos os problemas de cálculo da solução  $u(r, \theta)$ : um em que o problema de autovalor se dá na variável angular,  $\theta$ , e o outro, na variável radial,  $r$ . Nos problemas aqui considerados, veremos que o primeiro tipo ocorre quando a condição de fronteira *não homogênea* é especificada numa borda circular, e o segundo tipo, numa borda retilínea. A caracterização desses dois tipos de problemas prende-se ao fato de que, num setor circular, há dois tipos de borda: retilínea e circular.

### 6.4.2.1 Equação de Laplace com Condição de Fronteira Não Homogênea em Borda Circular

— **Exemplo 6.8.**  $\nabla^2 u(r, \theta) = 0$  no disco de raio  $b$  centrado na origem sob a condição de fronteira  $u(b, \theta) = f(\theta)$ .

Substituindo na equação de Laplace a forma separada  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  que se admite para a solução, obtemos



$$\begin{aligned} \nabla^2 u(r, \theta) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (R\Theta) \\ &= R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0 \\ &\xrightarrow{\times r^2 / (R\Theta)} \underbrace{\frac{r^2 R'' + rR'}{R}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\lambda} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta(\theta) = 0 \dots\dots\dots \text{EDO angular} \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R(r) = 0 \dots\dots \text{EDO radial} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.43)$$

onde, conforme a nota na pág. 107, usamos a constante  $-\lambda$  para separar o termo dependente de  $\theta$  porque é nesta variável que se estabelecerá um problema de autovalor [um problema de autovalor não pode acontecer na variável  $r$  por causa da condição de fronteira não homogênea  $u = f(\theta)$  em  $r = b$  (na borda do disco)]. De fato, no presente problema, podemos considerar que a variável angular tome qualquer valor real ( $\theta \in \mathbb{R}$ ), mas exigindo que a solução  $u(r, \theta)$  tenha período  $2\pi$ , isto é, que satisfaça a *condição periódica*  $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$ . Note que essa condição se transfere para  $\Theta(\theta)$ :

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \Rightarrow \underbrace{R(r)}_{\neq 0} \Theta(\theta) = \underbrace{R(r)}_{\neq 0} \Theta(\theta + 2\pi) \Rightarrow \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \quad .$$

A EDO angular em (6.43) sujeita a essa condição periódica forma um problema de autovalor já resolvido, aquele na equação (6.3) com o período  $2\ell = 2\pi$  ( $\Rightarrow \ell = \pi$ ). Assim, temos

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R} \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \Theta_0(\theta) = 1, \quad \Theta_n(\theta)|_{n \geq 1} = c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta \end{cases} \quad .$$

Agora resolvemos a EDO radial em (6.43) com  $\lambda$  igual aos autovalores  $\lambda_n = n^2$  oriundos do problema de autovalor acima, que é uma equação de Euler-Cauchy (v. subseção 6.7.4); portanto,

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n(r) = 0 \Rightarrow R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r & (n = 0) \\ C_n r^n + D_n / r^n & (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad .$$

Devemos eliminar os segundos termos dessas soluções radiais fazendo  $D_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) para

evitar infinitude na origem<sup>(\*)</sup>. Portanto, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= R_0(r) \Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \Theta_n(\theta) = C_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n c_n r^n \cos n\theta + C_n d_n r^n \sin n\theta . \end{aligned}$$

Note que  $C_n c_n$  e  $C_n d_n$  são constantes arbitrárias, para as quais convém uma notação própria; digamos  $C_n c_n \equiv A_n$  e  $C_n d_n \equiv B_n$ . Assim o resultado acima toma a forma

$$u(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta \quad \blacksquare \quad (6.44)$$

Essa é a expressão da solução do problema, só faltando determinar as constantes  $C_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$ , o que é realizado com a imposição da (única) condição de fronteira:

$$u(b, \theta) = \frac{[2C_0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [b^n A_n] \cos n\theta + [b^n B_n] \sin n\theta = f(\theta) .$$

Essa equação mostra que os termos entre colchetes são os coeficientes da série de Fourier de  $f(\theta)$ , uma função de período  $2\pi$ ; logo, usando (5.4) com  $2\ell = 2\pi$ , isto é,  $\ell = \pi$ , obtemos

$$2C_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \blacksquare \quad (6.45a)$$

$$b^n A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{\pi b^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \blacksquare \quad (6.45b)$$

$$b^n B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{1}{\pi b^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \blacksquare \quad (6.45c)$$

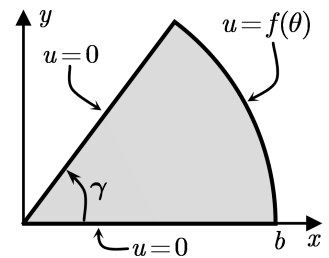
Se  $u(b, \theta) = f(\theta) = 10 + 5 \cos \theta - 8 \sin 2\theta$ , em vez de calcular os coeficientes usando as equações em (6.45), obtemo-los por comparação direta:

$$\begin{aligned} u(b, \theta) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n b^n \cos n\theta + B_n b^n \sin n\theta = 10 + 5 \cos \theta - 8 \sin 2\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0 = 10 \\ b A_1 = 5 \\ b^2 B_2 = -8 . \end{cases} \\ \therefore u(r, \theta) &= C_0 + A_1 r \cos \theta + B_2 \sin 2\theta = 10 + \frac{5}{b} r \cos \theta - \frac{8}{b^2} \sin 2\theta \quad \blacksquare \end{aligned}$$

—— **Exemplo 6.9.**  $\nabla^2 u(r, \theta) = 0$ , com  $r \in (0, b)$  e  $\theta \in (0, \gamma)$ , sob as condições de fronteira  $u(r, 0) = 0$ ,  $u(r, \gamma) = 0$  e  $u(b, \theta) = f(\theta)$ .

Trata-se do setor circular mostrado na figura à direita, cujas bordas retílineas em  $\theta = 0$  e  $\theta = \gamma$  estão submetidas a condições de fronteira *homogêneas*, indicando que o problema de autovalor se estabelecerá na variável  $\theta$  após a separação de variáveis por meio da expressão  $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ . No caso, surge o problema de autovalor em (6.1) com  $\ell = \gamma$ :

$$\begin{cases} \theta'' + \lambda \theta = 0, \quad \theta \in (0, \gamma) \\ \theta(0) = \theta(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \Theta_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} . \end{cases}$$



Calculemos  $R_n(r)$  resolvendo a EDO radial em (6.43) com  $\lambda = \lambda_n = (n\pi/\gamma)^2$ :

$$r^2 R_n'' + r R_n' - \left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2 R_n = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{\gamma}} + D_n / r^{\frac{n\pi}{\gamma}} .$$

(\*) o que, numa notação corriqueira, pode ser assim expresso:  $|R_n(0)| < \infty$



Para evitar infinitude em  $r = 0$ , devemos fazer  $D_n = 0$ . Assim, a solução geral é

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1,2,3,\dots} R_n(r) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=1,2,3,\dots} C_n r^{\frac{n\pi}{\gamma}} \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} \quad \blacksquare \quad (6.46)$$

Determinamos as constantes  $C_n$  impondo a condição de fronteira não homogênea, obtendo

$$u(b, \theta) = \sum_{n=1,2,3,\dots} [C_n b^{\frac{n\pi}{\gamma}}] \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} = f(\theta), \quad \theta \in (0, \gamma),$$

onde vemos que os termos entre colchetes são os coeficientes da série de Fourier de  $f(\theta)$  em senos no intervalo  $(0, \gamma)$ . Logo, usando (5.13b), obtemos

$$C_n b^{\frac{n\pi}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma} \int_0^\gamma f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} d\theta \Rightarrow C_n = \frac{2}{\gamma b^{\frac{n\pi}{\gamma}}} \int_0^\gamma f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} d\theta \quad \blacksquare \quad (6.47)$$

—— **Exemplo 6.10.** O seguinte problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0, & \text{com } r \in (a, b) \text{ e } \theta \in \mathbb{R} \\ u(a, \theta) = 0 \text{ e } u(b, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

Este problema difere daquele no Exemplo 6.8 por ser o domínio da EDP uma arruela (em vez de um disco), o que acarreta uma condição de fronteira a mais: aquela na borda interna da arruela, que, no caso, é dada por  $u(a, \theta) = 0$ . Portanto, separando as variáveis, obtemos, na variável  $\theta$ , o mesmo problema de autovalor em (6.3), de condição periódica:

$$\begin{cases} \theta'' + \lambda \theta = 0, & \theta \in \mathbb{R} \\ \theta(\theta) = \theta(\theta + 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = n^2 & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \theta_0(\theta) = 1, \quad \theta_n(\theta) = c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta \end{cases};$$

Também obtemos a mesma EDO radial com a mesma solução geral:

$$r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n(r) = 0 \Rightarrow R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r & (n = 0) \\ C_n r^n + D_n / r^n & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}.$$

Antes da condição de fronteira não homogênea (na borda circular em  $r = b$ ) ser levada em conta, convém impor todas as que são homogêneas. Tomando então a condição homogênea na borda circular em  $r = a$ , obtemos

$$u(a, \theta) = R(a) \underbrace{\Theta(\theta)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow R(a) = 0,$$

uma condição de fronteira que a parte radial  $R(r)$  deve satisfazer. Impondo-a, obtemos

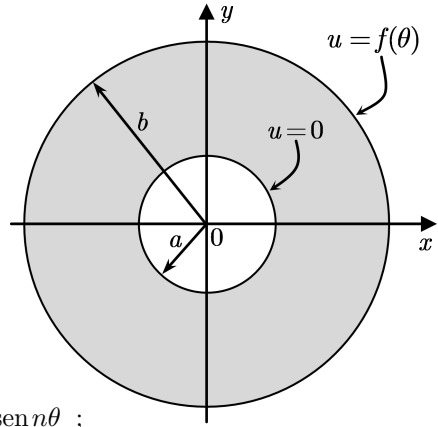
$$R_n(a) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln a = 0 & \Rightarrow C_0 = -D_0 \ln a & (n = 0) \\ C_n a^n + D_n / a^n = 0 & \Rightarrow D_n = -a^{2n} C_n & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}.$$

Com esse resultado,  $R_n(r)$  toma a forma

$$R_n(a) = \begin{cases} D_0 \ln(r/a) & (n = 0) \\ C_n (r^n - a^{2n}/r^n) & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}.$$

Neste momento formamos a solução  $u(r, \theta)$  geral (a que satisfaz as condições homogêneas):

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= R_0(r) \Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \Theta_n(\theta) \\ &= D_0 \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \\ &= D_0 \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n c_n}_{A_n} \left( r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \cos n\theta + \underbrace{C_n d_n}_{B_n} \left( r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \sin n\theta \\ &= D_0 \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \cos n\theta + B_n \left( r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \sin n\theta \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6.48)$$



onde definimos as constantes arbitrárias  $A_n$  e  $B_n$  conforme indicadas. Para determinar essas constantes e finalizar o problema, impomos a condição de fronteira não homogênea:

$$u(b, \theta) = \frac{[2D_0 \ln(b/a)]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \left( b^n - \frac{a^{2n}}{b^n} \right) \cos n\theta + \left[ B_n \left( b^n - \frac{a^{2n}}{b^n} \right) \right] \sin n\theta \right] = f(\theta) ,$$

equação que mostra serem os termos entre colchetes os coeficientes da série de Fourier da  $f(\theta)$ , uma função de período  $2\pi$ ; logo, usando (5.13a), obtemos

$$2D_0 \ln(b/a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \Rightarrow \quad D_0 = \frac{1}{2\pi \ln(b/a)} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \blacksquare \quad (6.49a)$$

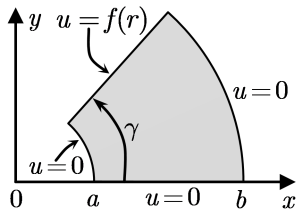
$$A_n(b^n - a^{2n}/b^n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{\pi(b^n - a^{2n}/b^n)} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \blacksquare \quad (6.49b)$$

$$B_n(b^n + a^{2n}/b^n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{1}{\pi(b^n + a^{2n}/b^n)} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \blacksquare \quad (6.49c)$$

**Exercício:** Prove que a solução deste problema no limite de quando  $a$  tende a zero é a solução do problema no Exemplo 6.8.

#### 6.4.2.2 Equação de Laplace com Condição de Fronteira Não Homogênea em Borda Retilínea

— **Exemplo 6.11.** Resolução da equação de Laplace no setor de arruela mostrado na figura abaixo, sob as condições de fronteira indicadas.



A substituição de  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  na equação de Laplace fornece

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{\underbrace{-\lambda}_R} + \frac{\Theta''}{\underbrace{\lambda}_\Theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r^2 R'' + r R' + \lambda R(r) = 0 \\ \Theta'' - \lambda \Theta(\theta) = 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

onde usamos a constante  $-\lambda$  (de acordo com a Nota na pág. 107) para separar o termo dependente de  $r$  por ser nesta variável que se estabelecerá um problema de autovalor, haja vista a homogeneidade das condições de fronteira nas bordas circulares (onde  $r$  se mantém constante). De fato, impondo as condições nessas fronteiras circulares, obtemos

$$\begin{cases} u(a, \theta) = R(a)\Theta(\theta) = 0 \\ u(b, \theta) = R(b)\Theta(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow R(a) = R(b) = 0 ,$$

as quais, juntamente com a EDO radial separada acima, formam o seguinte problema de valor de fronteira na variável radial:

$$r^2 R'' + r R' + \lambda R(r) = 0 , \quad r \in (a, b) , \quad R(a) = R(b) = 0 , \quad (6.51)$$

o qual admite a solução trivial  $R(r) \equiv 0$ , mas que também pode admitir soluções não triviais correspondentes a certos valores de  $\lambda$ ; ou seja, trata-se de um problema de autovalor, que pode ser escrito na forma  $LR(r) = \lambda R(r)$ , com  $L = -r^2 d^2/dr^2 - r d/dr$ . Ainda não consideramos nenhum problema de autovalor com esse operador. Passamos então aos cálculos dos autovalores e autofunções do problema em (6.51). Empregamos abaixo a solução geral da EDO em (6.51) obtida na subseção 6.7.4.

Para  $\lambda = 0$ :  $R(r) = c_1 + c_2 \ln r$ .

$$\begin{cases} R(a) = c_1 + c_2 \ln a = 0 \\ R(b) = c_1 + c_2 \ln b = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R(r) = 0 (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{logo, zero não é autovalor.} \end{cases}$$

Para  $\lambda = -k^2$  ( $k > 0$ ):  $R(r) = c_1 r^k + c_2/r^k$ .

$$\begin{cases} R(a) = c_1 a^k + c_2/a^k = 0 \\ R(b) = c_1 b^k + c_2/b^k = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R(r) = 0 (\forall x) \text{ é a única solução;} \\ \text{logo, não há autovalores negativos.} \end{cases}$$

Para  $\lambda \equiv k^2$  ( $k > 0$ ) :  $R(r) = c_1 \cos(k \ln r) + c_2 \sin(k \ln r)$  . (6.52)

No que segue, formamos o sistema linear homogêneo com as duas incógnitas  $c_1$  e  $c_2$  (marcado com o símbolo  $\star$ ) usando as duas condições de fronteira em  $r = a$  e  $r = b$ , e exigimos que seu determinante principal se anule, assim possibilitando a existência de solução distinta da solução trivial  $c_1 = c_2 = 0$  e, por conseguinte, de autofunção [solução  $R(r) \neq 0$  da EDO radial]:

$$\begin{aligned} \star \left\{ \begin{array}{l} R(a) = c_1 \cos(k \ln a) + c_2 \sin(k \ln a) = 0 \\ R(b) = c_1 \cos(k \ln b) + c_2 \sin(k \ln b) = 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \begin{vmatrix} \cos(k \ln a) & \sin(k \ln a) \\ \cos(k \ln b) & \sin(k \ln b) \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \sin(k \ln b) \cos(k \ln a) - \sin(k \ln a) \cos(k \ln b) &= \sin[k \ln b - k \ln a] = \sin[k \ln(b/a)] = 0 \\ \Rightarrow k \ln(b/a) = n\pi &\Rightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{\ln(b/a)} \Rightarrow \text{autovalores } \lambda_n = k_n^2 = \left( \frac{n\pi}{\ln(b/a)} \right)^2 . \end{aligned}$$

Com  $k = k_n$ , as soluções do sistema linear  $\star$  correspondentes não são constantes  $c_{1n}$  e  $c_{2n}$  independentes; de fato, podemos relacioná-las usando a primeira equação daquele sistema (poderia ser a segunda, pois as duas são equivalentes):

$$c_{1n} \cos(k_n \ln a) + c_{2n} \sin(k_n \ln a) = 0 \Rightarrow c_{1n} = -c_{2n} \frac{\sin(k_n \ln a)}{\cos(k_n \ln a)} .$$

Substituindo  $k = k_n$  na expressão da solução radial em (6.52), e eliminando  $c_{1n}$  usando o resultado acima, obtemos as autofunções:

$$\begin{aligned} R_n(r) &= c_{1n} \cos(k_n \ln r) + c_{2n} \sin(k_n \ln r) = -c_{2n} \frac{\sin(k_n \ln a)}{\cos(k_n \ln a)} \cos(k_n \ln r) + c_{2n} \sin(k_n \ln r) \\ &= \underbrace{\frac{c_{2n}}{\cos(k_n \ln a)}}_{\text{constante irrelevante}} \left[ \underbrace{\sin(k_n \ln r) \cos(k_n \ln a) - \sin(k_n \ln a) \cos(k_n \ln r)}_{\sin(k_n \ln r - k_n \ln a)} \right] \\ \Rightarrow R_n(r) &= \sin\left(k_n \ln \frac{r}{a}\right) \Rightarrow R_n(r) = \sin \frac{n\pi \ln(r/a)}{\ln(b/a)} . \end{aligned}$$

Note que  $R_n(a) = R_n(b) = 0$ .

Está assim calculada a parte radial de  $u(r, \theta)$ . Passemos ao cálculo da parte angular, resolvendo a EDO angular em (6.50) com  $\lambda = \lambda_n = k_n^2$  sob a condição  $\Theta_n(0) = 0$  que se deduz da condição de fronteira homogênea  $u = 0$  na borda retilínea em  $\theta = 0$ . Ou seja, resolvamos o problema

$$\Theta_n'' - k_n^2 \Theta_n(\theta) = 0 , \quad \theta \in (0, \gamma) , \quad \Theta_n(0) = 0 .$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Theta_n(\theta) &= A_n \cosh k_n \theta + B_n \sinh k_n \theta ; \\ \Theta_n(0) &= A_n = 0 ; \\ \Theta_n(\theta) &= B_n \sinh k_n \theta = B_n \sinh \frac{n\pi \theta}{\ln(b/a)} . \end{aligned}$$

A solução geral é, portanto,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\theta) R_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi \theta}{\ln(b/a)} \sin \frac{n\pi \ln(r/a)}{\ln(b/a)} \quad \blacksquare \quad (6.53)$$

Agora determinamos as constantes  $B_n$  nessa solução geral impondo a condição não homogênea na borda retilínea em  $\theta = \gamma$ :

$$u(r, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi \gamma}{\ln(b/a)} \sin \frac{n\pi \ln(r/a)}{\ln(b/a)} = f(r) .$$

Esta é uma série de Fourier em senos de  $f(r)$ , o que fica evidente mudando a notação:

$$\rho \equiv \ln(r/a) \in [0, \ell] \quad \{\text{onde } \ell \equiv \ln(b/a)\} \iff r = a e^\rho \in [a, b] ; \quad f(r) = f(a e^\rho) \equiv F(\rho) . \quad (6.54)$$

De fato, a série acima agora pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n \sinh \frac{n\pi\gamma}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi\rho}{\ell} = F(\rho) , \quad \rho \in (0, \ell) ,$$

onde o termo entre colchetes pode ser calculado usando (5.13b), assim finalizando o presente problema:

$$B_n \sinh \frac{n\pi\gamma}{\ell} = \frac{2}{\gamma} \int_0^{\ell} F(\rho) \sin \frac{n\pi\rho}{\ell} d\rho \Rightarrow B_n = \frac{2}{\gamma \sinh \frac{n\pi\gamma}{\ell}} \int_0^{\ell} F(\rho) \sin \frac{n\pi\rho}{\ell} d\rho ,$$

ou, na notação original, tendo em conta que  $d\rho = (d\rho/dr) dr = (1/r) dr$ :

$$B_n = \frac{2}{\gamma \sinh \frac{n\pi\gamma}{\ln(b/a)}} \int_0^{\ln(b/a)} f(r) \sin \frac{n\pi \ln(r/a)}{\ln(r/b)} \frac{dr}{r} \quad \blacksquare \quad (6.55)$$

Nota: Resolvemos detalhadamente o problema de autovalor em (6.51), *mas sem necessidade*, uma vez que ele se transforma naquele em (6.1) mediante a mudança de variável em (6.54), isto é, ele se converte no seguinte problema:

$$R'' + \lambda R(\rho) = 0 , \quad \rho \in (0, \ell) , \quad R(\rho) = 0 \text{ se } \rho = 0 \text{ ou } \ell .$$

Essa nova forma da EDO é obtida rapidamente usando os resultados da seção (6.7.4):

$$\left. \begin{aligned} R(r) &= R(a e^{\rho}) \equiv R(\rho) \\ r R'(r) &= R'(\rho) \\ r^2 R''(r) &= R''(\rho) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda R(r) = R''(\rho) + \lambda R(\rho) .$$

Os cálculos por esse modo seriam mais rápidos.

Continua verdadeira, portanto, a afirmação no início do segundo parágrafo da seção 6.1, a de que, nas aplicações físicas que seriam abordadas, não seria necessário considerar problemas de autovalor formados com operadores diferenciais distintos de  $L = -d^2/dx^2$ , em que pese o problema em (6.51), formado com  $L = -r^2 d^2/dr^2 - r d/dr$ .

## 6.5 Exercícios

### 6.5.1 Enunciados

**1]** Resolva a equação unidimensional do calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) , \quad x \in (0, \ell) , \quad t > 0 ,$$

sob as seguintes condições:

- a)  $\ell = \alpha = 1$  ,  $T(0, t) = T(1, t) = 0$  ,  $T(x, 0) = 3$  .
- b)  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(1, t) = 0$  ,  $T(x, 0) = 6 + 10 \cos \frac{4\pi x}{\ell}$  .

**2]** Resolva a equação unidimensional da onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) , \quad x \in (0, \ell) , \quad t > 0 ,$$

sob as seguintes condições:

- a)  $\ell = c = 1$  ,  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0$  ,  $y(x, 0) = 0$  e  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = x - \frac{1}{2}$  .
- b)  $\ell = c = 1$  ,  $y(0, t) = y(1, t) = 0$  ,  $y(x, 0) = 6 \sin 2\pi x$  e  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$  .
- c)  $\ell = c = 2$  ,  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(2, t) = 0$  ,  $y(x, 0) = -2 + 5 \cos 3\pi x$  e  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 4 - 7 \cos \pi x$  .

3] Resolva a equação de Laplace nas coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 :$$

- a)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{com } x \in (-\infty, 0), y \in (0, 2), \text{ e sob as condições:} \\ u(x, 0) = u(x, 2) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 5 \operatorname{sen} \pi y - 3 \operatorname{sen} 2\pi y. \end{array} \right.$
- b)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{com } x \in (0, 1), y \in (0, 1), \text{ e sob as condições:} \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, u(x, 0) = 8 \operatorname{sen} 2\pi x, u(x, 1) = 6 \operatorname{sen} \pi x + 5 \operatorname{sen} 2\pi x - 9 \operatorname{sen} 4\pi x. \end{array} \right.$

4] Resolva a equação de Laplace nas coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad r \in (a, b), \quad \theta \in I,$$

sob as seguintes condições:

- a)  $b \rightarrow \infty$  e  $I = \mathbb{R}$ ,  $u(a, \theta) = -3 + 2 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} 2\theta$ .
- b)  $a = 0$  e  $b = 3$ ,  $I = (0, \pi/6)$ ,  $u(r, 0) = (r, \pi/6) = 0$ ,  $u(3, \theta) = 10$ .

## 6.5.2 Soluções

1(a)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \xrightarrow{T(x, t) \equiv \psi(x)\tau(t)} \frac{\psi''}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda.$$

$$\psi'' + \lambda \psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

$$\lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \leftrightarrow \psi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/\ell) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\tau'_n + \lambda_n \alpha \tau_n(t) = 0 \Rightarrow \tau_n(t) = e^{-\lambda_n \alpha t}.$$

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} e^{-\lambda_n \alpha t}.$$

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} = 3.$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell 3 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} dx \stackrel{\ell=1}{=} \frac{2}{1} \int_0^1 3 \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 6 \left[ -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 \\ &= -\frac{6}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] = -\frac{6}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 12/(n\pi) & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}. \end{aligned}$$

$$T(x, t) \stackrel{\ell=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t} = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{12}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t} \blacksquare$$

1(b)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \xrightarrow{T(x, t) \equiv \psi(x)\tau(t)} \frac{\psi''}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau'}{\tau} = -\lambda.$$

$$\psi'' + \lambda \psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0.$$

$$\lambda_0 = 0 \leftrightarrow \psi_0(x) = 1, \quad \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \leftrightarrow \psi_n(x) = \cos(n\pi x/\ell) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\tau'_n + \lambda_n \alpha \tau_n(t) = 0 \Rightarrow \tau_0(t) = 1 \text{ e } \tau_n(t)|_{n \geq 1} = e^{-\lambda_n \alpha t}.$$

$$T(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} e^{-\lambda_n \alpha t}.$$

$$T(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = 6 + 10 \cos \frac{4\pi x}{\ell}. \quad (\star)$$

$$A_0 = 6, \quad A_4 = 10, \quad A_n|_{\substack{n \neq 0 \\ n \neq 4}} = 0.$$

$$T(x, t) = 6 + 10 \cos \frac{4\pi x}{\ell} e^{-(4\pi/\ell)^2 \alpha t} \blacksquare$$

Nota: Alerta-se que é mais trabalhoso calcular os coeficientes da série de Fourier de  $T(x, 0)$  em cossenos na equação (★) usando (5.13a) do que obtê-los por comparação como fizemos acima; de fato, observe:

$$A_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell T(x, 0) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left( 6 + 10 \cos \frac{4\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{2}{\ell} \underbrace{6 \int_0^\ell dx}_\ell + \frac{2}{\ell} \underbrace{10 \int_0^\ell \cos \frac{4\pi x}{\ell} dx}_0 = \frac{2}{\ell} 6 \ell = 12$$

e

$$\begin{aligned} A_n|_{n \geq 1} &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell T(x, 0) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left( 6 + 10 \cos \frac{4\pi x}{\ell} \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \\ &= \frac{2}{\ell} \underbrace{6 \int_0^\ell \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_0 + \frac{2}{\ell} \underbrace{10 \int_0^\ell \cos \frac{4\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx}_{\begin{cases} \ell/2 & \text{se } n=4 \\ 0 & \text{se } n \neq 4 \end{cases}} = \begin{cases} \frac{2}{\ell} 10 \frac{\ell}{2} = 10 & \text{se } n = 4 \\ 0 & \text{se } n \neq 4 \end{cases}, \end{aligned}$$

onde, para obter os resultados das integrais, usamos as relações de ortonormalidade em (5.1b).

## 2(a)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \xrightarrow{y(x, t) \equiv \psi(x)\tau(t)} \frac{\psi''}{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''}{\tau} = -\lambda.$$

$$\psi'' + \lambda \psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0.$$

$$\lambda_0 = 0 \leftrightarrow \psi_0(x) = 1, \quad \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \leftrightarrow \psi_n(x) = \cos(n\pi x/\ell) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\tau'_n + \underbrace{\lambda_n c^2}_{(n\pi c/\ell)^2} \tau_n(t) = 0 \Rightarrow \tau_0(t) = A_0 + B_0 t \quad \text{e} \quad \tau_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi c t}{\ell}.$$

$$y(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi c t}{\ell} \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

$$y(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_n|_{n \geq 1} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{[2B_0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n\pi c}{\ell} B_n \right] \cos \frac{n\pi x}{\ell} = x - \frac{1}{2}.$$

$$2B_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left( x - \frac{1}{2} \right) dx \stackrel{\ell=1}{=} \frac{2}{1} \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi c}{\ell} B_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left( x - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \stackrel{\substack{\ell=1 \\ c=1}}{\rightarrow} n\pi B_n = \frac{2}{1} \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) \cos(n\pi x) dx \\ &= 2 \left[ \frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} - \frac{x \cos n\pi x}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{2n\pi} \right]_0^1 = 2 \frac{-\cos n\pi - 1}{2n\pi} = -\frac{(-1)^n + 1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \\ -2/(n\pi)^2 & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}.$$

$$y(x, t) = \sum_{n=2,4,6,\dots} B_n \sin(n\pi t) \cos(n\pi x) = \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{-2}{(n\pi)^2} \sin(n\pi t) \cos(n\pi x) \blacksquare$$

---

**2(b)**

---

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \xrightarrow{y(x, t) \equiv \psi(x)\tau(t)} \frac{\psi''}{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''}{\tau} = -\lambda.$$

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

$$\lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \leftrightarrow \psi_n(x) = \text{sen}(n\pi x/\ell) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\tau'_n + \underbrace{\lambda_n c^2}_{(n\pi c/\ell)^2} \tau_n(t) = 0 \Rightarrow \tau_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{\ell}.$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell}.$$

$$\stackrel{\ell=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \text{sen} n\pi t) \text{sen} n\pi x.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \text{sen} n\pi x = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} n\pi x = 6 \text{sen} 2\pi x \Rightarrow A_2 = 6 \text{ e } A_n|_{n \neq 2} = 0.$$

$$y(x, t) = A_2 \cos 2\pi t \text{sen} 2\pi x = 6 \cos 2\pi t \text{sen} 2\pi x \quad \blacksquare$$

---

**2(c)**

---

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \xrightarrow{y(x, t) \equiv \psi(x)\tau(t)} \frac{\psi''}{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''}{\tau} = -\lambda.$$

$$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0.$$

$$\lambda_0 = 0 \leftrightarrow \psi_0(x) = 1, \quad \lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \leftrightarrow \psi_n(x) = \cos(n\pi x/\ell) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\tau'_n + \underbrace{\lambda_n c^2}_{(n\pi c/\ell)^2} \tau_n(t) = 0 \Rightarrow \tau_0(t) = A_0 + B_0 t \text{ e } \tau_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{\ell}.$$

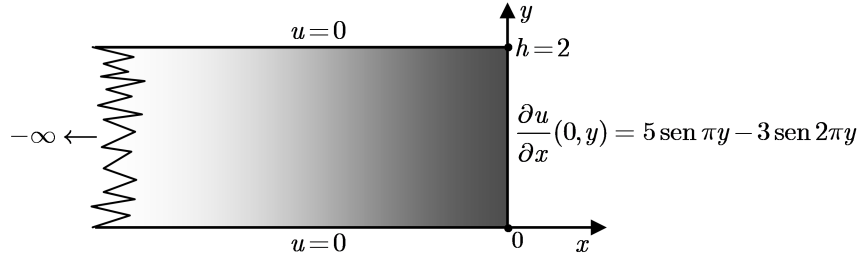
$$y(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

$$\stackrel{\ell=2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \text{sen} n\pi t) \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

$$y(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{2} = -2 + \underbrace{5 \cos 3\pi x}_{5 \cos \frac{6\pi x}{2}} \Rightarrow A_0 = -2, \quad A_6 = 5, \quad A_n|_{n \neq 0, 6} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = 4 - \underbrace{7 \cos \pi x}_{7 \cos \frac{2\pi x}{2}} \Rightarrow \begin{cases} B_0/2 = 4 \\ 2\pi B_2 = -7 \Rightarrow B_2 = -7/(2\pi) \\ B_n|_{n \neq 0, 2} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A_0 + B_0 t + A_6 \cos 6\pi t \cos \frac{6\pi x}{2} + B_2 \text{sen} 2\pi t \cos \frac{2\pi x}{2} \\ &= -2 + 4t + 5 \cos 6\pi t \cos 3\pi x - \frac{7}{2\pi} \text{sen} 2\pi t \cos \pi x \quad \blacksquare \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{u(x,y) \equiv X(x)Y(y)} \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\lambda} = 0.$$

$$Y'' + \lambda Y(y) = 0, \quad y \in (0, h), \quad Y(0) = Y(h) = 0.$$

$$\lambda_n = (n\pi/h)^2 \leftrightarrow Y_n(y) = \text{sen}(n\pi y/h) \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

$$X_n'' - (n\pi/h)^2 X_n(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \Rightarrow X_n(x) = \underbrace{A_n}_{=0^*} e^{-n\pi x/h} + B_n e^{n\pi x/h}.$$

$$^* X_n(-\infty) < \infty \Rightarrow A_n = 0.$$

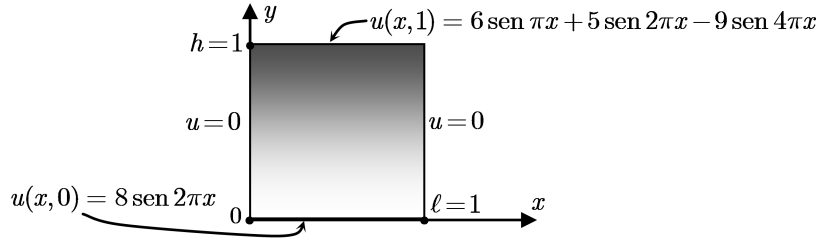
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{n\pi x/h} \text{sen}(n\pi y/h) \stackrel{h=2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{n\pi x/2} \text{sen}(n\pi y/2).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi B_n/2) \text{sen}(n\pi y/2) = 5 \underbrace{\text{sen}(\pi y)}_{\text{sen}(2\pi y/2)} - 3 \underbrace{\text{sen}(2\pi y)}_{\text{sen}(4\pi y/2)}.$$

$$-n\pi B_n/2 = \begin{cases} -2\pi B_2/2 = 5 & \text{se } n = 2 \\ -4\pi B_4/2 = -3 & \text{se } n = 4 \\ 0 & \text{se } n \neq 2 \text{ ou } n \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = -5/\pi \\ B_4 = 3/(2\pi) \\ B_n|_{n \neq 2, 4} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= B_2 e^{2\pi x/2} \text{sen}(2\pi y/2) + B_4 e^{4\pi x/2} \text{sen}(4\pi y/2) \\ &= -\frac{5}{\pi} e^{\pi x} \text{sen}(\pi y) + \frac{3}{2\pi} e^{2\pi x} \text{sen}(2\pi y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$





$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \xrightarrow{u(x,y) \equiv X(x)Y(y)} \quad \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\lambda} = 0.$$

$$X'' + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

$$\lambda_n = (n\pi/\ell)^2 \leftrightarrow X_n(x) = \text{sen}(n\pi x/\ell) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$Y_n'' - (n\pi/\ell)^2 Y_n(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_n(y) = A_n \cosh(n\pi y/\ell) + B_n \sinh(n\pi y/\ell).$$

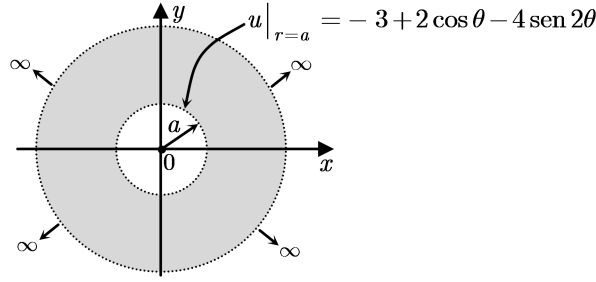
$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cosh(n\pi y/\ell) + B_n \sinh(n\pi y/\ell)] \text{sen}(n\pi x/\ell) \\ &= \sum_{n=1}^{\ell=1} (A_n \cosh n\pi y + B_n \sinh n\pi y) \text{sen} n\pi x. \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} n\pi x = 8 \text{sen} 2\pi x \quad \Rightarrow \quad A_2 = 8 \text{ e } A_n|_{n \neq 2} = 0.$$

$$u(x, h) = u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cosh n\pi + B_n \sinh n\pi] \text{sen} n\pi x = 6 \text{sen} \pi x + 5 \text{sen} 2\pi x - 9 \text{sen} 4\pi x.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underbrace{A_1}_0 \cosh \pi + B_1 \sinh \pi = 6 & \Rightarrow B_1 = 6/\sinh \pi \\ \underbrace{A_2}_8 \cosh 2\pi + B_2 \sinh 2\pi = 5 & \Rightarrow B_2 = (5 - 8 \cosh 2\pi)/\sinh 2\pi \\ \underbrace{A_4}_0 \cosh 4\pi + B_4 \sinh 4\pi = -9 & \Rightarrow B_4 = -9/\sinh 4\pi \\ \text{Se } n \neq 1, 2 \text{ ou } 4 & \Rightarrow B_n = 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (A_1 \cosh \pi y + B_1 \sinh \pi y) \text{sen} \pi x \\ &\quad + (A_2 \cosh 2\pi y + B_2 \sinh 2\pi y) \text{sen} 2\pi x \\ &\quad + (A_4 \cosh 4\pi y + B_4 \sinh 4\pi y) \text{sen} 4\pi x \\ &= \frac{6}{\sinh \pi} \sinh \pi y \text{sen} \pi x \\ &\quad + \left( 8 \cosh 2\pi y + \frac{5 - 8 \cosh 2\pi}{\sinh 2\pi} \sinh 2\pi y \right) \text{sen} 2\pi x \\ &\quad - \frac{9}{\sinh 4\pi} \sinh 4\pi y \text{sen} 4\pi x \quad \blacksquare \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \xrightarrow{u(r, \theta) \equiv R(r) \Theta(\theta)} \quad \underbrace{\frac{r^2 R'' + r R'}{R}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\lambda} = 0.$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda_0 = 0 \leftrightarrow \Theta_0(x) = 1, \quad \lambda_n = n^2 \leftrightarrow \Theta_n(\theta) = C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r & (n = 0) \\ d_n r^n + d_n / r^n & (n \geq 1) \end{cases}.$$

$$|R_n(r \rightarrow \infty)| < \infty \quad \Rightarrow \quad d_0 = c_n|_{n \geq 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(r) = \begin{cases} c_0 & (n = 0) \\ d_n / r^n & (n \geq 1) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= R_0(r) \Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \Theta_n(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{r^n} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta \quad [A_0 \equiv c_0, A_n \equiv d_n C_n, B_n \equiv d_n D_n]. \end{aligned}$$

$$u(a, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{a^n} \sin n\theta = -3 + 2 \cos \theta - 4 \sin 2\theta.$$

$$\begin{cases} A_0 = -3 \\ A_1/a = 2 \Rightarrow A_1 = 2a \\ B_2/a^2 = -4 \Rightarrow B_2 = -4a^2 \\ A_n|_{n \neq 0} = B_n|_{n \neq 2} = 0. \end{cases}$$

$$u(r, \theta) = A_0 + \frac{1}{r} A_1 \cos \theta + \frac{1}{r^2} B_2 \sin 2\theta = -3 + \frac{2a \cos \theta}{r} - \frac{4a^2 \sin 2\theta}{r^2} \quad \blacksquare$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \xrightarrow{u(r, \theta) \equiv R(r) \Theta(\theta)} \quad \underbrace{\frac{r^2 R'' + r R'}{R}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\lambda} = 0.$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, \gamma), \quad \Theta(r, 0) = \Theta(r, \gamma) = 0 \quad [\text{onde } \gamma = \pi/6].$$

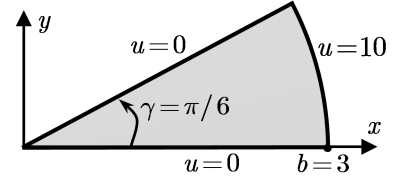
$$\lambda_n = (n\pi/\gamma)^2 \Leftrightarrow \Theta_n(\theta) = \text{sen}(n\pi\theta/\gamma) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$r^2 R_n'' + r R_n' - (n\pi/\gamma)^2 R_n(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(r) = C_n r^{n\pi/\gamma} + D_n / r^{n\pi/\gamma}.$$

$$|R_n(0)| < \infty \quad \Rightarrow \quad B_n = 0.$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{n\pi/\gamma} \text{sen} \frac{n\pi\theta}{\gamma}.$$

$$u(b, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n b^{n\pi/\gamma} \text{sen} \frac{n\pi\theta}{\gamma} = 10.$$



$$C_n b^{n\pi/\gamma} = \frac{2}{\gamma} \int_0^\gamma 10 \text{sen} \frac{n\pi\theta}{\gamma} d\theta = \frac{20}{\gamma} \left[ \frac{-\cos(n\pi\theta/\gamma)}{n\pi/\gamma} \right]_0^\gamma = \frac{20}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1].$$

$$= \begin{cases} 40/(n\pi) & \text{se } (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & \text{se } (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_n = \begin{cases} \frac{40}{\pi n b^{n\pi/\gamma}} & \text{se } (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & \text{se } (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}.$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{40}{\pi n b^{n\pi/\gamma}} r^{n\pi/\gamma} \text{sen} \frac{n\pi\theta}{\gamma} \quad \begin{matrix} b=3 \\ \gamma=\pi/6 \end{matrix} \quad \frac{40}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \left( \frac{r}{3} \right)^{6n} \text{sen}(6n\theta) \quad \blacksquare$$

## 6.6 Problemas Propostos

Resolva os seguintes problemas:

$$1] \quad \text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t), \\ \text{com } x \in (0, \ell) \text{ e } t > 0. \\ T(0, t) = T(\ell, t) = 0. \\ T(x, 0) = 5 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}. \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t), \\ \text{com } x \in (0, 2) \text{ e } t > 0. \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}T(2, t) = 0. \\ T(x, 0) = 10 - 5 \cos 3\pi x. \end{array} \right.$$

$$2] \quad \text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t), \\ \text{com } x \in (0, \ell) \text{ e } t > 0. \\ y(0, t) = y(\ell, t) = 0. \\ y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 5 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}. \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t), \\ \text{com } x \in (0, 2) \text{ e } t > 0. \\ y(0, t) = y(2, t) = 0. \\ y(x, 0) = 5 \operatorname{sen} 3\pi x, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = -6 \operatorname{sen} \pi x. \end{array} \right.$$

$$3] \quad \text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \\ \text{com } x \in (0, \ell) \text{ e } y \in (0, h). \\ u(x, 0) = u(x, h) = 0. \\ u(0, y) = 0, \quad u(\ell, y) = 5 \operatorname{sen} \frac{2\pi y}{h}. \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) = 0, \\ \text{com } x \in (0, 2) \text{ e } y \in (0, \infty). \\ u(0, y) = u(2, y) = 0. \\ u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} 3\pi x. \end{array} \right.$$

$$4] \quad \text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, \\ \text{com } r \in (0, b) \text{ e } \theta \in (0, \pi/2). \\ u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0. \\ u(b, \theta) = 5 \operatorname{sen} 4\theta. \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, \\ \text{com } r \in (a, \infty) \text{ e } \theta \in (0, \pi). \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = 0. \\ u(a, \theta) = 5 \operatorname{sen} 4\theta. \end{array} \right.$$

Eis as respostas:

$$1] \quad \text{a)} \quad T(x, t) = 5 e^{(2\pi/\ell)^2 \alpha t} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

$$\text{b)} \quad T(x, t) = 10 - 5 e^{-36\pi^2 t} \cos 3\pi x$$

$$2] \quad \text{a)} \quad y(x, t) = \frac{5\ell}{2\pi c} \operatorname{sen} \frac{2\pi ct}{\ell} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

$$\text{b)} \quad y(x, t) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} 3\pi t \operatorname{sen} \pi x + 5 \cos 9\pi t \operatorname{sen} 3\pi x$$

$$3] \quad \text{a)} \quad u(x, t) = 5 \operatorname{csch} \frac{2\pi \ell}{\ell} \operatorname{senh} \frac{2\pi x}{h} \operatorname{sen} \frac{2\pi y}{h}$$

$$\text{b)} \quad u(x, t) = 5 e^{-3\pi y} \operatorname{sen} 3\pi x$$

$$4] \quad \text{a)} \quad u(r, \theta) = \frac{5}{b^4} r^4 \operatorname{sen} 4\theta$$

$$\text{b)} \quad u(r, \theta) = \frac{5}{r^4} a^4 \operatorname{sen} 4\theta$$

## 6.7 Apêndice

### 6.7.1 Gradiente, Divergência, Laplaciano

Nas coordenadas cartesianas, para um campo escalar  $u(x, y, z)$  ou um campo vetorial  $\vec{V}(x, y, z) = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$ , são definidas as seguintes grandezas:

- gradiente de  $u$   $\equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$
- divergência de  $\vec{V}$   $\equiv \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$
- laplaciano de  $u$   $\equiv$  divergência do gradiente de  $u$   
 $=$  divergência de  $\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

A notação dessas grandezas por meio do chamado *operador nabla*,

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

é obtida como segue:

$$\text{gradiente de } u = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} u = \nabla u.$$

$$\text{divergência de } \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(V_x, V_y, V_z)}_{\vec{V}} = \nabla \cdot \vec{V}.$$

$$\text{laplaciano de } u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u.$$

Nesta última equação, empregamos a notação  $\vec{v}^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v}$  para denotar o chamado *quadrado escalar* do vetor  $\vec{v}$ .

Em resumo:

$$\text{gradiente de } u(x, y, z) : \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\text{divergência de } \vec{V}(x, y, z) : \quad \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{laplaciano de } u(x, y, z) : \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Essas expressões são válidas apenas se  $(x, y, z)$  forem as coordenadas cartesianas. Em outros sistemas de coordenadas, tais como o das coordenadas polares, cilíndricas e esféricas, as expressões corretas devem ser deduzidas. Naturalmente, para usar as expressões acima em problemas bidimensionais cujo domínio esteja contido no plano  $xy$ , basta desprezar as derivadas parciais em relação a  $z$ .

### 6.7.2 Solução Geral da EDO $\psi'' + \lambda\psi(x) = 0$

A forma da solução geral da EDO  $\psi'' + \lambda\psi(x) = 0$  varia conforme  $\lambda$  seja nulo, negativo ou positivo. Vejamos.

- Para  $\lambda = 0$ :

Nesse caso a EDO tem a forma  $\psi''(x) = 0$ , sendo sua solução geral obtida rapidamente por duas integrações consecutivas, obtendo-se

$$\psi(x) = c_1 + c_2 x \quad \blacksquare$$

- Para  $\lambda < 0 : \lambda = -k^2$  ( $k > 0$ ):

Nesse caso a EDO tem a forma  $\psi'' - k^2\psi(x) = 0$ . Calculemos as raízes da equação característica:

$$r^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{k^2} = \pm k .$$

Logo, a solução geral é

$$\psi(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad \blacksquare$$

Convém também expressar essa solução em termos das funções hiperbólicas [v. Ref. [11], seção 3.11] como segue:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} = c_1 (\cosh kx + \sinh kx) + c_2 (\cosh kx - \sinh kx) \\ &= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\bar{c}_1} \cosh kx + \underbrace{(c_1 - c_2)}_{\bar{c}_2} \sinh kx = \bar{c}_1 \cosh kx + \bar{c}_2 \sinh kx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- Para  $\lambda > 0 : \lambda = k^2$  ( $k > 0$ ):

Nesse caso a EDO tem a forma  $\psi'' + k^2\psi(x) = 0$ . Calculemos as raízes da equação característica:

$$r^2 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ik .$$

Logo, a solução geral é

$$\psi(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \quad \blacksquare$$

Em resumos, temos

$\psi'' + \lambda\psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 x & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx \text{ (ou } c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) & \text{se } \lambda = -k^2 \text{ (} k > 0 \text{)} \\ c_1 \cos kx + c_2 \sin kx & \text{se } \lambda = k^2 \text{ (} k > 0 \text{)} \end{cases} ,$
--

onde expressamos  $\lambda = k^2$  ou  $\lambda = -k^2$ , com  $k > 0$ , para atribuir a  $\lambda$  qualquer valor real positivo ou negativo, respectivamente, admitindo  $k > 0$  para que a relação entre  $\lambda$  e  $k$  seja biunívoca, isto é, que a cada valor de  $\lambda$  corresponda um único valor de  $k$ , e a cada um de  $k$ , um único de  $\lambda$ .

### 6.7.3 O Laplaciano em Coordenadas Polares

Para mostrar que

$$\nabla^2(r, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} , \quad (\text{I})$$

tomamos a fórmula do laplaciano em coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

e realizamos nela a mudança para as coordenadas polares, definidas por  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Pela regra da cadeia, podemos escrever o que segue:

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x) r_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= r_x^2 u_{rr} + \theta_x^2 u_{\theta\theta} + 2r_x \theta_x u_{r\theta} + r_{xx} u_r + \theta_{xx} u_\theta . \end{aligned}$$

Neste último resultado, trocando  $x$  por  $y$ , obtemos

$$u_{yy} = r_y^2 u_{rr} + \theta_y^2 u_{\theta\theta} + 2r_y \theta_y u_{r\theta} + r_{yy} u_r + \theta_{yy} u_\theta .$$

Logo,

$$u_{xx} + u_{yy} = (r_x^2 + r_y^2) u_{rr} + (\theta_x^2 + \theta_y^2) u_{\theta\theta} + 2(r_x + r_y) \theta_x u_{r\theta} + (r_{xx} + r_{yy}) u_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) u_\theta . \quad (\text{II})$$

Para calcular  $r_x$ ,  $\theta_x$ , etc, usamos a lei de transformação inversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan(y/x) + \delta^{(*)} .$$

Logo,

$$\begin{aligned} r_x &= \partial \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) = (2x) / \left( 2\sqrt{x^2 + y^2} \right) = x/r . \\ r_{xx} &= \partial(xr^{-1}) / \partial x = r^{-1} - xr^{-2}r_x = (r^2 - x^2)/r^3 = y^2/r^3 . \\ \theta_x &= \frac{\partial}{\partial x} [\arctan(y/x) + \delta] = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2} , \\ \theta_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (-yr^{-2}) = 2yr^{-3}r_x = \frac{2y}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{2xy}{r^4} . \end{aligned}$$

Nas duas primeiras expressões acima, podemos simplesmente substituir  $x$  e  $y$  um pelo outro, já que a expressão de  $r$  é simétrica com respeito a essa troca, para obter

$$r_y = y/r \quad \text{e} \quad r_{yy} = x^2/r^3 .$$

Já  $\theta$  não exhibe tal simetria; suas derivadas em relação a  $y$  devem ser calculadas normalmente:

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{\partial}{\partial y} [\arctan(y/x) + \delta] = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} , \\ \theta_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} (xr^{-2}) = -2xr^{-3}r_y = \frac{-2x}{r^3} \frac{y}{r} = \frac{-2xy}{r^4} . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} r_x^2 + r_y^2 &= x^2/r^2 + y^2/r^2 = (x^2 + y^2)/r^2 = r^2/r^2 = 1 , \\ \theta_x^2 + \theta_y^2 &= y^2/r^4 + x^2/r^4 = r^2/r^4 = 1/r^2 , \\ r_x\theta_x + r_y\theta_y &= -xy/r^3 + xy/r^3 = 0 , \\ r_{xx} + r_{yy} &= y^2/r^3 + x^2/r^3 = r^2/r^3 = 1/r , \\ r_{xx} + r_{yy} &= 0 . \end{aligned}$$

A substituição desses resultados na equação (II) fornece a equação (I) desejada.

#### 6.7.4 Solução Geral da EDO $r^2 R'' + rR' + \lambda R(r) = 0$

Essa é a EDO de Euler-Cauchy. Vamos resolvê-la para o caso em que  $r$  é a coordenada polar radial, a qual, por hipótese, não toma valores negativos. Assim, vamos resolvê-la para  $r > 0$ :

$$\rho = \ln r \Rightarrow r = e^\rho \quad \text{e} \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{r} = e^{-\rho} .$$

$$R(r) = R(e^\rho) \equiv R(\rho) .$$

$$R'(r) = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = R'(\rho) \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{rR'(r) = R'(\rho)}} .$$

$$\begin{aligned} R''(r) &= \frac{d}{dr} \left( \frac{dR}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( R'(\rho) e^{-\rho} \right) = [R''(\rho) e^{-\rho} - R'(\rho) e^{-\rho}] e^{-\rho} \\ &= [R''(\rho) - R'(\rho)] \underbrace{(e^{-\rho})^2}_{1/r^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r^2 R''(r) = R''(\rho) - R'(\rho)}} . \end{aligned}$$

$$[r^2 R''] + [rR'] + \lambda R(r) = 0 \Rightarrow [R''(\rho) - \cancel{R'(\rho)}] + [\cancel{R'(\rho)}] + \lambda R(\rho) = 0$$

$$\Rightarrow R''(\rho) + \lambda R(\rho) = 0 \Rightarrow R(\rho) = \begin{cases} c_1 + c_2 \rho & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 e^{k\rho} + c_2 e^{-k\rho} & \text{se } \lambda = -k^2 \ (k > 0) \\ c_1 \cos k\rho + c_2 \sin k\rho & \text{se } \lambda = k^2 \ (k > 0) \end{cases}$$

(\*) Uma vez que  $\theta \in [0, 2\pi)$ , é necessário definir a constante aditiva  $\delta$  como sendo igual a 0,  $\pi$ ,  $\pi$  ou  $2\pi$  conforme  $\theta$  seja do 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante, respectivamente, uma vez que os valores principais da função  $\arctan$  estão no intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Se bem que esse cuidado é irrelevante na presente dedução, pois  $\delta$  desaparecerá com as diferenciações.

Voltando às funções em função de  $r$ , obtemos finalmente

$$r^2 R'' + r R' + \lambda R(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln r & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 r^k + c_2 / r^k & \text{se } \lambda = -k^2 \ (k > 0) \\ c_1 \cos(k \ln r) + c_2 \operatorname{sen}(k \ln r) & \text{se } \lambda = k^2 \ (k > 0) \end{cases}$$



# Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, Geraldo, *Cálculo das Funções de uma Variável*, setima edição, LTC Editora, São Paulo, 2017.
- [2] Barton, Gabriel, *Elements of Green's Functions and Propagation: Potentials, Diffusion, and Waves*, Oxford University Press, 1989, ISBN 0-19-851998-2.
- [3] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., e Meade, Douglas B. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 11ª Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2020, ISBN 978-85-216-3712-7.
- [4] Bronson, R., *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, 1977.
- [5] Brown, J. B. e Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, Eighth Edition, McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-803597-5, New York, 2012.
- [6] Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, The International Series of Monographs On Physics 27, Quarta Edição, Oxford University Press, 1958.
- [7] Guidorizzi, Hamilton Luiz, *Um Curso de Cálculo*, 7ª edição, Vol. 4, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2013.
- [8] Hildebrant, F. B. *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [9] Kaplan, W., *Cálculo Avançado*, Edgard Blücher Ltda, 1972.
- [10] Steinbruch, Alfredo e Winterle Paulo, *Álgebra Linear*, 2ª edição, Pearson, 1995, ISBN 978-00-745-0412-3.
- [11] Stewart, James, *Cálculo*, Volume I, Tradução da 7ª edição norte-americana, Cengage Learning, São Paulo, 2013, ISBN 978-85-221-1461-0.
- [12] Stewart, James, *Cálculo*, Volume II, Tradução da 7ª edição norte-americana, Cengage Learning, São Paulo, 2013, ISBN 978-85-221-1463-4.
- [13] Zill, Dennis G. e Cullen, Michael R. *Equações Diferenciais*, Terceira Edição, volume 1, Pearson Makron Books, São Paulo, 2001, ISBN 85-346-1291-9.
- [14] Zill, Dennis G. e Cullen, Michael R. *Equações Diferenciais*, Terceira Edição, volume 2, Pearson Makron Books, São Paulo, 2001, ISBN 85-346-1141-6.
- [15] Zill, Dennis G., *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, Tradução da 10ª edição norte-americana, Cengage Learning, São Paulo, 2016, ISBN 978-85-221-2389-6.